Solutions de la série n°6

Solution de l'exercice 1 :

1. Nous montrons que la classe C des structures finies n'est pas axiomatisable dans le langage égalitaire $\mathcal{L}$ ne contenant que le symbole d'égalité. En vue d'une contradiction, supposons qu'une $\mathcal{L}$-théorie T axiomatise C. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, considérons la formule

$$\psi_n \ : \ \exists x_1 \cdots \exists x_n \left(\bigwedge_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant n \\ i \neq j}} \neg x_i = x_j \right).$$

   Nous formons la théorie $T' = T \cup \{\psi_n \mid n \geqslant 1\}$. Montrons que T' est finiment satisfaisable.

   Soit $F \subseteq T'$ un sous-ensemble fini de T'. Notons $N = \max\{n \in \mathbb{N} \mid \psi_n \in F\}$. Pour la structure $\mathcal{N} = \{0, 1, \ldots, N-1\}$, nous avons d'une part $\mathcal{N} \models T$ car $\mathcal{N} \in C$ et d'autre part, $\mathcal{N} \models \{\psi_n \mid 1 \leqslant n \leqslant N\}$. Ainsi puisque $F \subseteq T \cup \{\psi_n \mid 1 \leqslant n \leqslant N\}$, nous avons $\mathcal{N} \models F$. Par conséquent, T' est finiment satisfaisable.

   Par le théorème de compacité, T' est satisfaisable. Toutefois, pour toute structure $\mathcal{M}$ finie, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{M} \not\models \psi_N$ et donc aucune structure de C ne saurait être modèle de T'. Contradiction.

2. Supposons qu'une classe C de $\mathcal{L}$-structure est axiomatisable par une $\mathcal{L}$-théorie finie T. Pour $\psi_T : \bigwedge_{\varphi \in T} \varphi$ la conjonction des formules de T, on a que pour toute $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$

$$\mathcal{M} \in C \quad \text{si et seulement si} \quad \mathcal{M} \models \psi_T.$$

   Ainsi, la classe complémentaire de C est axiomatisée par la théorie consistant en la seule formule $\neg\psi_T$.

3. Comme déjà vu, la classe C des structures infinies est axiomatisable par la théorie $T = \{\psi_n \mid n \geqslant 1\}$ pour les ψ_n du point 1. Toutefois cette classe n'est pas finiment axiomatisable.

   En effet, par 1., la classe complémentaire (les structures finies) n'est pas axiomatisable et donc pas finiment axiomatisable, il découle alors de 2. (par contraposition) que C n'est pas finiment axiomatisable.

Solution de l'exercice 2 :

1. Nous considérons le langage $\mathcal{L}_0^+ = \mathcal{L}_0 \cup \{c\}$ où c est un nouveau symbole de constante. Pour tout $n \in \mathcal{N}$ non nul, on considère la formule $\psi_n \ : \ \exists x(x \underline{\times} \underline{n}) = c$. Considérons la $\mathcal{L}_0^+$-théorie $T^+ = T \cup \{\psi_n : n \in \mathbb{N}\}$. Nous montrons que T^+ est finiment satisfaisable.

   Soit $F \subseteq T^+$ une théorie finie, et posons $N = \max\{n \in \mathbb{N} : \psi_n \in F\}$ (existe car F fini !). Étendons la $\mathcal{L}_0$-structure $\mathcal{N}$ en une $\mathcal{L}_0^+$-structure $\mathcal{N}_N$ en posant $c^{\mathcal{N}_N} = \prod_{0<i\leqslant N} i$. Nous affirmons que $\mathcal{N}_N \models F$. En effet, comme $\mathcal{N} \models T$, nous avons aussi $\mathcal{N}_N \models T$. De plus si $\psi_n \in F$, alors $n \leqslant N$ et donc n divise $\prod_{0<i\leqslant N} i$, par conséquent $\mathcal{N}_N \models \psi_n$. Ainsi comme $F \subseteq T \cup \{\psi_n : 0 < n \leqslant M\}$, nous avons $\mathcal{N}_N \models F$.

   Par le théorème de compacité, la théorie T^+ est donc satisfaisable, soit donc $\mathcal{M}^+$ une $\mathcal{L}_0^+$-structure qui satisfait T^+. Notons $\mathcal{M}$ la $\mathcal{L}_0$-structure obtenue de $\mathcal{M}^+$ en oubliant l'interprétation du symbole de constante c. La $\mathcal{L}_0$-structure $\mathcal{M}$ convient. En effet, $\mathcal{M}^+ \models T$ et donc $\mathcal{M} \models T$. De plus, pour $m = c^{\mathcal{M}^+} \in |\mathcal{M}|$ comme $\mathcal{M}^+ \models \psi_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ non nul, nous avons bien que $\mathcal{M}_{y\to m} \models \exists x(x \underline{\times} \underline{n}) = y$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ non nul, ou autrement dit $\underline{n}^{\mathcal{M}}$ « divise » m pour tout nombre naturel n non nul.

2. Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}_0$-structure $\mathcal{M}$ telle que $\mathcal{M} \models T$. Soit $p : \mathbb{N} \to |\mathcal{M}|$ une fonction. Si p est un plongement : $\mathcal{N} \to \mathcal{M}$, alors $p(0) = p(\underline{0}^{\mathcal{N}}) = \underline{0}^{\mathcal{M}}$. De plus, toujours par la définition de plongement, nous devons avoir pour tout $n \in N$ que $p(n+1) = p(\underline{S}^{N}(n)) = \underline{S}^{\mathcal{M}}(p(n))$. Ainsi nécessairement, si p est un plongement : $\mathcal{N} \to \mathcal{M}$, alors $p(n) = \underline{n}^{\mathcal{M}}$. Ceci montre l'unicité. Pour l'existence, il suffit de montrer que $p : n \mapsto \underline{n}^{\mathcal{M}}$ est un plongement. Pour voir que p est injective, observer que pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ distincts, $\mathcal{N} \models \neg(\underline{n} = \underline{m})$, et donc comme $\mathcal{M} \models T$, $\mathcal{M} \models \neg(\underline{n} = \underline{m})$. De plus nous avons bien $p(\underline{0}^{\mathcal{N}}) = p(0) = \underline{0}^{\mathcal{M}}$, et pour tout $n \in |\mathcal{N}|$, $p(\underline{S}^{\mathcal{N}}(n)) = p(n+1) = \underline{n+1}^{\mathcal{M}} = \underline{S}^{\mathcal{M}}(\underline{n}^{\mathcal{M}}) = \underline{S}^{\mathcal{M}}(p(n))$. Finalement si $m, n \in \mathbb{N}$, nous avons $\mathcal{N} \models \underline{m} \underline{+} \underline{n} = \underline{m+n}$ et donc $\mathcal{M} \models \underline{m} \underline{+} \underline{n} = \underline{m+n}$ et donc pour tous $m, n \in |\mathcal{N}|$

$$p(m \underline{+}^{\mathcal{N}} n) = \underline{m+n}^{\mathcal{M}} = \underline{m}^{\mathcal{M}} \underline{+}^{\mathcal{M}} \underline{n}^{\mathcal{M}} = p(m) \underline{+}^{\mathcal{M}} p(n).$$

   Le cas du symbole de fonction binaire $\underline{\times}$ est tout à fait similaire.

Solution de l'exercice 3 :

1. $\Rightarrow$ Supposons le théorème de compacité. Soient T une théorie et φ une formule close.
   - $\Leftarrow$ S'il existe $T' \subseteq T$ fini tel que $T' \models \varphi$, alors $\varphi \in \mathrm{Csq}(T') \subseteq \mathrm{Csq}(T)$ et donc $T \models \varphi$.
   - $\Rightarrow$ Réciproquement, par contraposition, supposons que pour tout sous-ensemble fini $T' \subseteq T$, nous avons $T' \not\models \varphi$. Alors pour tout sous-ensemble fini $T' \subseteq T$ il existe une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$ telle que $\mathcal{M} \models T'$ et $\mathcal{M} \models \neg\varphi$. Ainsi $T \cup \{\neg\varphi\}$ est finiment satisfaisable et par le théorème de compacité $T \cup \{\neg\varphi\}$ est satisfaisable. II existe donc une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{N}$ telle que $\mathcal{N} \models T$ et $\mathcal{N} \models \neg\varphi$. Par conséquent, $T \not\models \varphi$.

   $\Leftarrow$ Supposons le corollaire. Soit T une théorie.
   - $\Rightarrow$ Si T est satisfaisable, alors tout $T' \subseteq T$ est satisfaisable.
   - $\Leftarrow$ Par contraposition, si T n'est pas satisfaisable alors $T \models \varphi \wedge \neg\varphi$ pour φ une formule close quelconque de $\mathcal{L}$. Par le corollaire, il existe $T' \subseteq T$ fini tel que $T' \models \varphi \wedge \neg\varphi$. Il s'ensuit que T' n'est pas satisfaisable.

2. Soit T une théorie. S'il existe une théorie $T' \subseteq T$ finie et inconsistante, alors T est inconsistante.

   En effet, $T' \subseteq T$ implique que tout modèle de T est un modèle de T'. Réciproquement, comme ci-dessus, si T est inconsistante, alors $T \models \varphi \wedge \neg\varphi$ pour une formule close quelconque φ. Par le corollaire, il existe une théorie finie $T' \subseteq T$ telle que $T' \models \varphi \wedge \neg\varphi$, i.e. il existe une théorie finie $T' \subseteq T$ inconsistante.

Solution de l'exercice 4 :

1. Supposons que C est finiment axiomatisable. Il existe donc une théorie finie F qui axiomatise C et nous notons ψ la conjonction des membres de F. Comme de plus T_C axiomatise C, nous avons que pour toute $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$,

$$\mathcal{M} \models T_C \quad \text{ssi} \quad \mathcal{M} \in C \quad \text{ssi} \quad \mathcal{M} \models \psi.$$

   En particulier, les implications de gauche à droite nous assure que $T_C \models \psi$.

Par le corollaire du théorème de compacité (Exercice 3), il existe une théorie finie $T' \subseteq T_C$ telle que $T' \models \psi$. Remarquons que pour tout $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$, si $\mathcal{M} \models \psi$, alors $\mathcal{M} \models T_C$ et donc $\mathcal{M} \models T'$. Par conséquent, pour toute $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$, $\mathcal{M} \models T'$ ssi $\mathcal{M} \in C$.

Nous avons donc montré l'existence d'une théorie finie $T' \subseteq T_C$ qui axiomatise C. La réciproque est évidente.

2. Avec les notations de l'Exercice 1, la classe C des structures infinies est axiomatisé par la théorie $\{\psi_n \mid n \geqslant 1\}$. Par le point précédent, si C est finiment axiomatisable, alors il existe une partie finie P de naturels non nuls tel que $T' = \{\psi_n \mid n \in P\}$ axiomatise la classe des structures infinies. Or il est clair qu'une structure avec $\max P$ éléments satisfait T'.