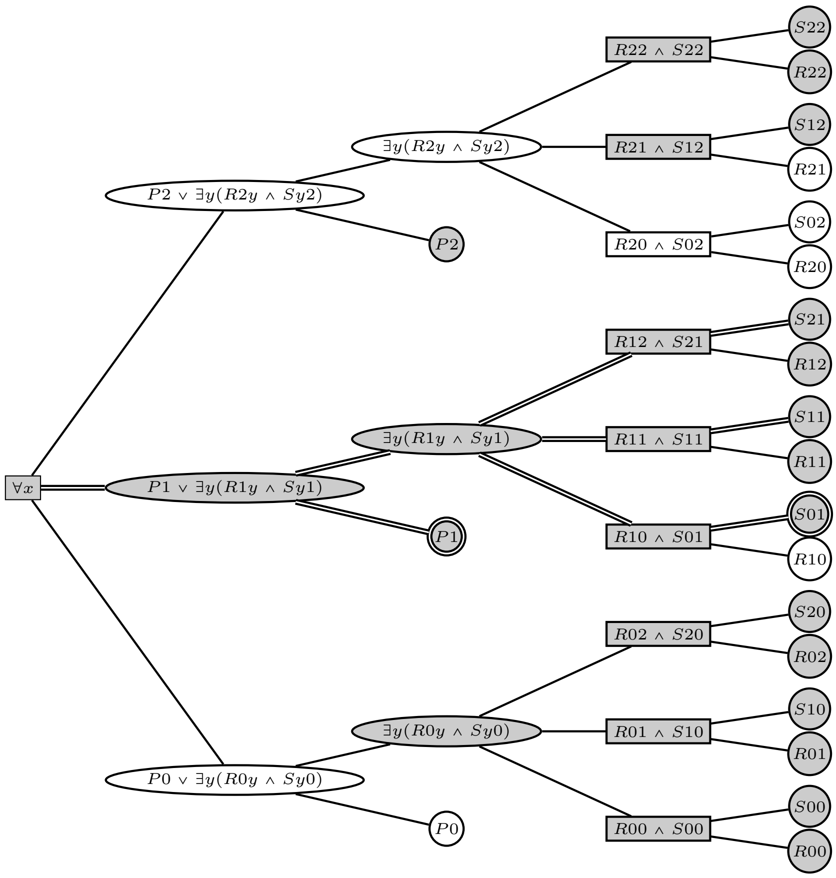
Solutions de la série n°4

Solution de l'exercice 1 :

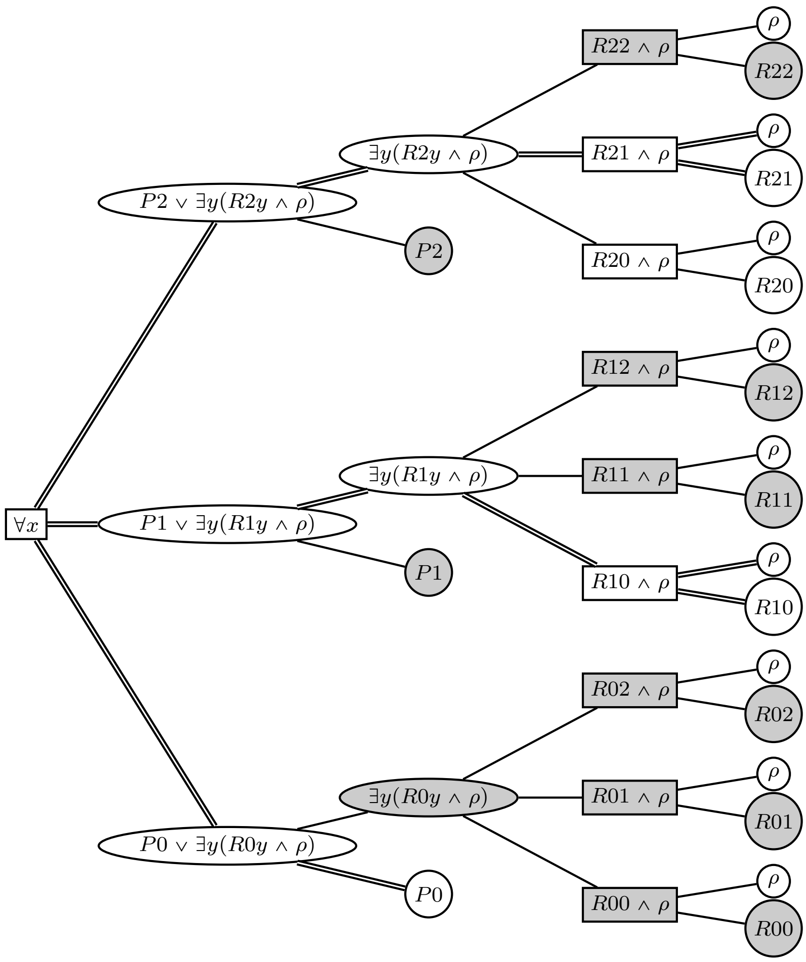
1. Voici l'arbre de jeu d'évaluation $\mathbb{E}v(\mathfrak{A}, \varphi)$. Les nœuds elliptiques représentent les positions où c'est au tour du Vérificateur de jouer, les rectangles celles où c'est au tour du Falsificateur. Les nœuds circulaires sont les feuilles. Les formules dans les nœuds ne sont là que pour indiquer comment l'arbre a été construit. Les nœuds grisés sont ceux depuis lesquels le Falsificateur possède une stratégie gagnante, depuis les autres nœuds, c'est le Vérificateur qui possède une stratégie gagnante. Le sous-arbre indiqué par les doubles lignes est une stratégie gagnante pour le Falsificateur. Les feuilles entourées deux fois sont celles dont le changement de couleur fait changer le possesseur d'une stratégie gagnante.



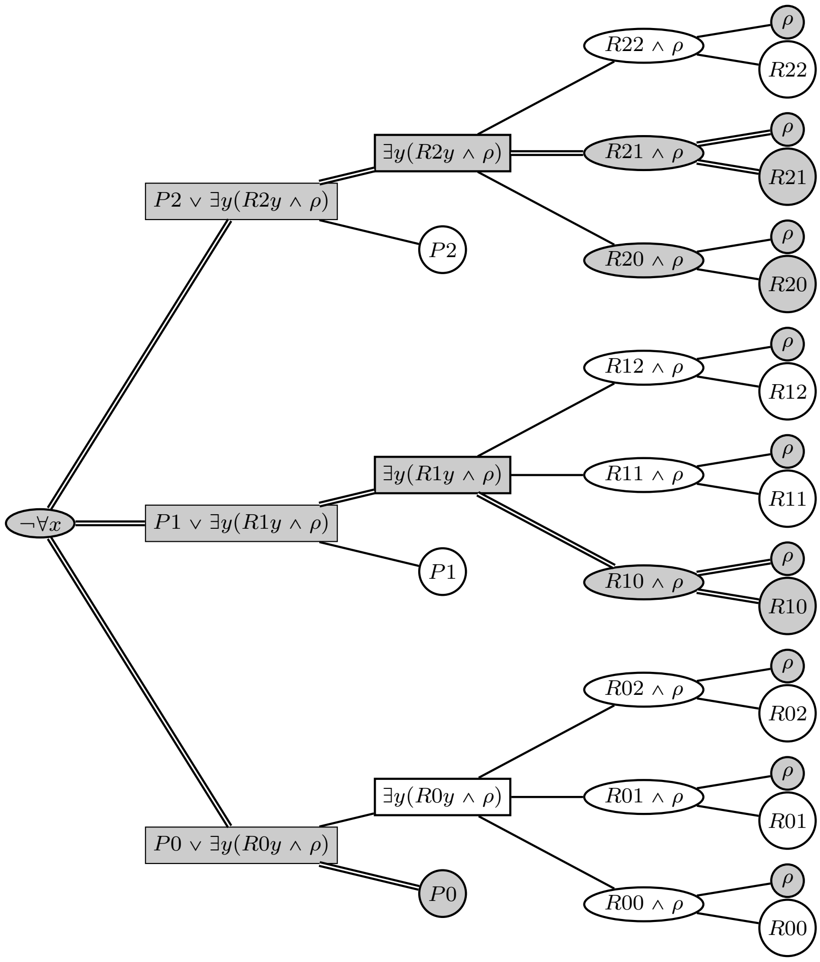
2. Appelons ρ la formule close $\neg\forall u\exists z(Ruz \wedge Szu)$ et observons que la formule ψ est obtenue de la formule $\neg\varphi$ – où φ est la formule du point précédent – en remplaçant Syx par ρ. Ainsi, l'arbre de jeu d'évaluation $\mathbb{E}v(\mathfrak{A}, \psi)$ s'obtient en échangant le rôle des joueurs dans l'arbre de jeu de $\mathbb{E}v(\mathfrak{A}, \varphi)$ et en substituant à chaque feuille étiquettée Smn pour $m, n \in \{0, 1, 2\}$ l'arbre de jeu de $\mathbb{E}v(\mathfrak{A}, \rho)$. Or en utilisant le fait que $\mathfrak{A} \not\models \forall u\exists zSzu$ et donc que $\mathfrak{A} \models \neg\forall u\exists zSzu$, on observe que le Vérificateur possède une stratégie gagnante dans $\mathbb{E}v(\mathfrak{A}, \rho)$. Ainsi, on commence par construire un arbre équivalent (le Vérificateur possède une stratégie gagnante dans l'un si et seulement s'il en possède une dans l'autre) à l'arbre de jeu d'évaluation de la formule suivante

$$\forall x(Px \vee \exists y(Rxy \wedge \neg\forall u\exists z(Ruz \wedge Szu)).$$

On remarque que c'est le Vérificateur qui possède une stratégie gagnante dans ce jeu.



Puis, on construit son arbre dual pour avoir un arbre équivalent à l'arbre du jeu d'évaluation $\mathbb{E}v(\mathfrak{A}, \psi)$. On rappelle que l'arbre dual est obtenu de l'arbre précédent en échangeant les rôles des deux joueurs. Ainsi, on obtient que le Falsificateur a une stratégie gagnante, et donc le résultat est $\mathfrak{A} \not\models \psi$.

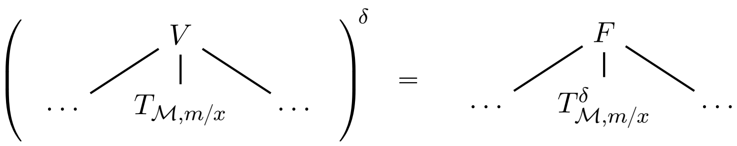


Solution de l'exercice 2 :

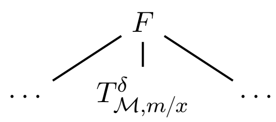
1. On définit $\varphi_1 : \forall x \forall y \forall z((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)$ pour exprimer la transitivité, $\varphi_2 : \forall x Rxx$ pour exprimer la réflexivité et $\varphi_3 : \forall x \forall y(Rxy \rightarrow Ryx)$ pour exprimer la symétrie.
   Le théorie des relations d'équivalence est donnée par $T_{\mathrm{RE}} = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$.
2. Soit $\psi_1 : \exists x \exists y \neg Rxy$.
   La théorie cherchée est $T_1 = T_{\mathrm{RE}} \cup \{\psi_1\}$.
3. Soit $\psi_2 : \exists x \exists y(\neg Rxy \wedge \forall z(Rxz \vee Ryz))$.
   La théorie désirée est $T_2 = T_{\mathrm{RE}} \cup \{\psi_2\}$.
4. Soit $\psi_3 : \forall x \exists y(\neg x = y \wedge Rxy)$.
   La théorie demandée est alors $T_3 = T_{\mathrm{RE}} \cup \{\psi_3\}$.

Solution de l'exercice 3 : Nous utilisons la définition de satisfaction d'une formule dans une structure en termes de jeu d'évaluation. Pour montrer que φ est (sémantiquement) équivalent à ψ, il faut montrer que pour toute $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$, le vérificateur possède une stratégie gagnante dans $\mathbb{E}v(\mathcal{M}, \varphi)$ si et seulement s'il possède une stratégie gagnante dans $\mathbb{E}v(\mathcal{M}, \psi)$. Nous utilisons la notion d'arbre de jeu d'évaluation et les notations de la Définition 4.25 du polycopié.

1. $\neg \exists x \phi \ \equiv \ \forall x \neg \phi$. Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure et soit $T_{\mathcal{M},m/x}$ l'arbre de jeu d'évaluation de la formule $\phi[x]$ dans $\mathcal{M}_{x \rightarrow m}$ pour $m \in |\mathcal{M}|$. L'arbre du jeu d'évaluation de $\neg \exists x \phi$ dans $\mathcal{M}$ est donné par :

   Tandis que l'arbre du jeu d'évaluation de $\forall x \neg \phi$ dans $\mathcal{M}$ est par définition

   Les deux arbres étant identiques, il s'ensuit que le vérificateur possède une stratégie dans l'un ssi il en possède une dans l'autre. Les deux formules sont donc équivalentes.
3. $\neg(\varphi \wedge \psi) \ \equiv \ (\neg \varphi \vee \neg \psi)$. Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure et soient $T_{\mathcal{M},\varphi}$, $T_{\mathcal{M},\psi}$ les arbres des jeux d'évaluation de φ et ψ respectivement dans $\mathcal{M}$. Nous

observons que les arbres de jeu d'évaluation de $\neg(\varphi \wedge \psi)$ (à gauche) et de $(\neg\varphi \vee \neg\psi)$ (à droite) dans $\mathcal{M}$ sont identiques :

$$\left(\begin{array}{ccc} & F & \\ / & & \backslash \\ T_{\mathcal{M},\varphi} & & T_{\mathcal{M},\psi} \end{array}\right)^{\delta} = \begin{array}{ccc} & V & \\ / & & \backslash \\ T^{\delta}_{\mathcal{M},\varphi} & & T^{\delta}_{\mathcal{M},\psi} \end{array}$$

Solution de l'exercice 4 : Fort des remarques et des notations de l'exercice précédent :

1. $(\forall x\varphi \to \psi) \equiv \exists x(\varphi \to \psi)$. Par l'exercice précédent, nous avons

$$(\forall x\varphi \to \psi) \ \equiv\ (\neg\forall x\varphi \vee \psi) \ \equiv\ (\exists x\neg\varphi \vee \psi).$$

Maintenant soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure et soient $T_{\mathcal{M},\psi}$ et $T_{\mathcal{M},\varphi[m/x]}$ les arbres des jeux d'évaluation de ψ et de $\varphi[m/x]$ pour $m \in |\mathcal{M}|$ dans $\mathcal{M}$ respectivement. Ci-dessous, les arbres des jeu d'évaluation de $(\exists x\neg\varphi \vee \psi)$ et de $\exists x(\neg\varphi \vee \psi)$ respectivement dans $\mathcal{M}$:

$$\begin{array}{ccccc} & & & V & \\ & & / & & \backslash \\ & & V & & T_{\mathcal{M},\psi} \\ & / & | & \backslash & \\ \dots & & T^{\delta}_{\mathcal{M},\varphi[m/x]} & & \dots \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & & V & & \\ & / & | & \backslash & \\ \dots & & V & & \dots \\ & / & & \backslash & \\ T^{\delta}_{\mathcal{M},\varphi[m/x]} & & & & T_{\mathcal{M},\psi} \end{array}$$

Supposons que le vérificateur possède une stratégie σ dans l'arbre de gauche. Nous distinguons deux cas :

i) σ consiste à choisir le fils de droite, puis continue avec une stratégie gagnante τ dans $T_{\mathcal{M},\psi}$. Le vérificateur possède alors une stratégie dans l'arbre de droite consistant à choisir un quelconque $m_0 \in |\mathcal{M}|$ ($|\mathcal{M}|$ est non vide par définition) puis choisir $T_{\mathcal{M},\psi}$ et suivre τ.

ii) σ consiste à choisir le fils de gauche, puis à choisir un certain $m_0 \in |\mathcal{M}|$ et enfin suivre une stratégie gagnante τ dans $T^{\delta}_{\mathcal{M},\varphi[m_0/x]}$. Le vérificateur possède alors une stratégie gagnante dans l'arbre de droite. Celle-ci consiste à choisir m_0, puis à choisir le fils de gauche et appliquer τ dans $T^{\delta}_{\mathcal{M},\varphi[m_0/x]}$.

Ainsi, si le vérificateur possède une stratégie gagnante dans l'arbre de gauche, il en possède une dans l'arbre de droite. Il reste à montrer de façon similaire la réciproque.