Solutions de la série n°3

Solution de l'exercice 1 :

1. Par exemple,
   a) $\varphi_1 : \exists x \exists y \neg x = y$;
   b) $\varphi_2 : \exists x \forall y x = y$;
   c) $\varphi_3 : \exists x \exists y \big(\neg x = y \wedge \forall z (z = x \vee z = y)\big)$;
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ définissons la formule

$$\psi_n = \exists x_0 \exists x_1 \cdots \exists x_n \left(\bigwedge_{\substack{0 \leqslant i,j \leqslant n \\ i \neq j}} \neg x_i = x_j \right).$$

   Il suffit alors de poser $T = \{\psi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
3. Non, $\{\varphi_1\} \not\models \varphi_3$ car la $\mathcal{L}$-structure $3 = \langle \{0, 1, 2\} \rangle$ est telle que $3 \models \varphi_1$ mais $3 \not\models \varphi_3$.
   Oui, $\{\neg\varphi_1\} \models \varphi_3$ car toute $\mathcal{L}$-structure qui n'a pas au moins deux éléments n'en possède qu'un seul et donc satisfait φ_2.
4. La relation $T \models \varphi_i$ n'est vérifiée que lorsque $i = 1$.

Solution de l'exercice 2 :

1. Par exemple, la $\mathcal{L}$-structure donnée par

$$\begin{tikzcd} a \arrow[loop above] \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & b \\ d & c \end{tikzcd}$$

   satisfait $\exists x \forall y R(x, y)$, mais ne satisfait pas $\forall x \exists y R(x, y)$;
2. Par exemple, la $\mathcal{L}$-structure donnée par

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] & b \arrow[loop above] \\ d \arrow[ur] & c \arrow[u] \end{tikzcd}$$

satisfait $\exists x \forall y \neg R(y,x)$ (considérer a), mais ne satisfait pas $\forall x \neg \forall y R(y,x)$ (considérer b).

3. Nous pouvons par exemple considérer les formules suivantes

$$\begin{aligned}
&\varphi_1 : \forall x\, R(x,x)\\
&\varphi_2 : \forall x\, \forall y\, (R(x,y) \to \neg R(y,x))\\
&\varphi_3 : \forall x\, \forall y\, (R(x,y) \to R(y,x))\\
&\varphi_4 : \exists x\, \forall y\, R(x,y)
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 3 :

1. Par exemple, $\psi_<(x,y) : \exists z(\neg z \simeq \underline{0} \wedge y \simeq (x \underline{+} z))$.
2. Par exemple,

$$\psi_{\texttt{prime}}(x) : \Big(\psi_<(\underline{1}, x) \wedge \neg \exists y \exists z\big((x \simeq (y \underline{\cdot} z)) \wedge \neg(y \simeq \underline{1}) \wedge \neg(z \simeq \underline{1})\big)\Big).$$

3. Par exemple,

$$\begin{aligned}
\varphi_{\text{Goldbach}} : \forall x\Big(&\exists y(\psi_<(\underline{1}, y) \wedge x \simeq (\underline{1} \underline{+} \underline{1}) \underline{\cdot} y) \to\\
&\qquad \exists z_1 \exists z_2\big(\psi_{\texttt{prime}}(z_1) \wedge \psi_{\texttt{prime}}(z_2) \wedge x \simeq z_1 \underline{+} z_2\big)\Big).
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 4 :

1. a) Considérons le langage du premier ordre $\mathcal{L}$ contenant
   - — deux symboles de constante 0 et p,
   - — un symbole de relation binaire R,
   - — un symbole de fonction unaire `Vabs`,
   - — un symbole de fonction unaire f,
   - — un symbole de fonction binaire `Soustr`.

   Dans ce langage du premier ordre, nous pouvons écrire la formule

$$\begin{aligned}
\varphi_{\text{CP}} :\ \forall x\Big(&R(0,x) \to \exists y\big(R(0,y) \wedge \forall z(R(\texttt{Vabs}(\texttt{Soustr}(p,z)), y)\\
&\qquad \to R(\texttt{Vabs}(\texttt{Soustr}(f(p), f(z))), x))\Big)
\end{aligned}$$

qui est une façon d'écrire la continuité de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ au point $p \in \mathbb{R}$, généralement écrite

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}(|p - x| < \delta \to |f(p) - f(x)| < \varepsilon)$$

lorsque le champ des quantificateurs est sous-entendu.

b) Soit, par exemple, la $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}_1$ avec $|\mathcal{M}_1| = \mathbb{R}$ où l'on fait les interprétations $0^{\mathcal{M}_1} = 0$, $p^{\mathcal{M}_1} = \frac{\pi}{2}$ $R^{\mathcal{M}_1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\}$, $\mathtt{Vabs}^{\mathcal{M}_1}$ est la valeur absolue $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{\mathcal{M}_1}(x) = \sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $\mathtt{Soustr}^{\mathcal{M}_1}$ est la soustraction usuelle $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x - y$. Alors, on $\mathcal{M}_1 \models \varphi_{\mathrm{CP}}$.

c) Soit, par exemple, la $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}_2$ avec $|\mathcal{M}_2| = \mathbb{N}$ où l'on fait les interprétations $0^{\mathcal{M}_2} = 0$, $p^{\mathcal{M}_2} = 10^5$ $R^{\mathcal{M}_2} = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x < y\}$, $\mathtt{Vabs}^{\mathcal{M}_2}$ est l'identité sur $\mathbb{N}$, $f^{\mathcal{M}_2}(n) = 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\mathtt{Soustr}^{\mathcal{M}_2}$ est la fonction constante égale à 0. Alors, on $\mathcal{M}_2 \models \varphi_{\mathrm{CP}}$.

2. a) Nous pouvons considérer la formule

$$\varphi_{\mathrm{C}} : \forall z_1 \forall x \Big(R(0, x) \to \exists y \big(R(0, y) \wedge \forall z_2 (R(\mathtt{Vabs}(\mathtt{Soustr}(z_1, z_2)), y) \\ \to R(\mathtt{Vabs}(\mathtt{Soustr}(f(z_1), f(z_2))), x)) \Big).$$

b) Pour les $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ définies au point précédent, nous avons $\mathcal{M}_1 \models \varphi_{\mathrm{C}}$ et $\mathcal{M}_2 \models \varphi_{\mathrm{C}}$.

Solution de l'exercice 5 :

1. Considérer par exemple les formules suivantes
   a) $\varphi_1 : \big(\forall x f(f(x)) = g(x) \wedge \exists y \forall x g(x) = y\big)$.
   b) $\varphi_2 : \forall x \exists y f(x) = g(y)$.
   c) $\varphi_3 : \exists x \Big(\big(f(x) = x \wedge \forall y (f(y) = y \to x = y)\big) \wedge \exists y g(y) = x \Big)$.
   d) $\varphi_4 : \big(\forall x \forall y (f(x) = f(y) \to x = y) \wedge \forall y \exists x (g(x) = y)\big)$.
2. Nous choisissons pour domaine de chacune des $\mathcal{L}$-structures l'ensemble $\mathbb{N}$ et nous interprétons les symboles de fonction unaire f et g comme suit :
   a) $f^{\mathcal{M}_1} = g^{\mathcal{M}_1} : n \mapsto n + 1$;
   b) $f^{\mathcal{M}_2} : n \mapsto n + 1$ et $g^{\mathcal{M}_2} = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$;
   c) $f^{\mathcal{M}_3} = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ et $g^{\mathcal{M}_3} : n \mapsto 0$;
   d) $f^{\mathcal{M}_4} : n \mapsto 2n$ et $g^{\mathcal{M}_4} : n \mapsto n^2$;

e) $f^{\mathcal{M}_5} : n \mapsto 2n$ et $g^{\mathcal{M}_5} : n \mapsto 2n+1$.

Solution de l'exercice 6 :

1. $\mathcal{M} \not\models \phi_1$, car $\mathcal{M} \models R(\varnothing, \varnothing)$;
2. $\mathcal{M} \models \phi_2$ car pour tout $E \subseteq \mathbb{N}$ si $E \neq \varnothing$ alors $\neg R(E, E)$;
3. $\mathcal{M} \models \forall x \forall y \forall z\ ((\Omega(x) \wedge \Omega(y) \wedge I(x,z) \wedge I(z,y)) \rightarrow \Omega(z))$, car si $E, F, E^\complement, F^\complement \subseteq \mathbb{N}$ sont infinis et $E \subseteq G \subseteq F$, alors d'une part $E \subseteq G$ implique G infini, et d'autre part, $G \subseteq F$ implique $F^\complement \subseteq G^\complement$ et donc $G^\complement$ est infini.
4. $\mathcal{M} \models \forall x \forall y \forall z\ ((\Omega(x) \wedge \Omega(y) \wedge \Omega(z) \wedge R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow R(x,z))$. En effet, si $E \subseteq F \subseteq G$ et $F \backslash E$ infini et $G \backslash F$ infini, alors $E \subseteq G$ et comme $G \backslash F \subseteq G \backslash E$, $G \backslash E$ est infini.
5. $\mathcal{M} \models \forall x \forall y\ ((\Omega(x) \wedge \Omega(y)) \rightarrow (\neg R(x,y) \vee \neg R(y,x)))$. Car de façon générale, si $E, F \subseteq \mathbb{N}$ sont non vides alors $R(E,F)$ implique $\neg R(F,E)$.
6. $\mathcal{M} \not\models \forall x \forall y\ ((\Omega(x) \wedge R(x,y)) \rightarrow \Omega(y))$. Penser à l'inclusion des nombres pairs dans les nombres naturels.
7. $\mathcal{M} \models \forall x \forall y\ ((\Omega(x) \wedge R(y,x)) \rightarrow \Omega(y))$. En effet, soit $E, F \subseteq \mathbb{N}$ avec F et $F^\complement$ infinis, et $E \subseteq F$, et $\mathrm{Card}(F \backslash E) = \mathrm{Card}(E)$. Comme $F^\complement \subseteq E^\complement$, $E^\complement$ est infini. De plus, supposons E est fini, alors $F \backslash E$ est fini et donc $F = E \cup F \backslash E$ est fini, ce qui est une contradiction puisque F est infini. Donc E est infini.
8. $\mathcal{M} \not\models \forall x \exists y \exists z\ (R(y,x) \wedge R(x,z))$, car pour tout $E \subseteq \mathbb{N}$ fini non vide de cardinalité impaire, nous avons que pour tout $F \subseteq \mathbb{N}$, $\neg R(F, E)$.