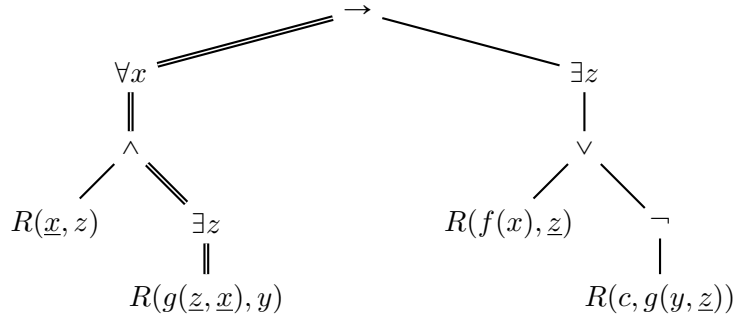


## Solutions de la série n°2

**Solution de l'exercice 1 :** L'arbre de décomposition de  $\varphi$  est le suivant. Une branche de longueur maximale est indiquée par les doubles lignes. Les occurrences liées des variables de  $\varphi$  sont soulignées.



Afin d'effectuer les substitutions demandées, nous commençons par substituer aux occurrences liées des variables de  $\varphi$  des variables n'apparaissant pas dans le terme  $u$  :

$$\varphi = \left( \forall x_1 (R(x_1, z) \wedge \exists z_1 R(g(z_1, x_1), y)) \rightarrow \exists z_1 (R(f(x), z_1) \vee \neg R(c, g(y, z_1))) \right)$$

Nous pouvons alors substituer le terme  $u$  :

$$\varphi_{[u/x]} : \left( \forall x_1 (R(x_1, z) \wedge \exists z_1 R(g(z_1, x_1), y)) \rightarrow \exists z_1 (R(f(g(f(x), g(z, c))), z_1) \vee \neg R(c, g(y, z_1))) \right)$$

$$\varphi_{[u/y]} : \left( \forall x_1 (R(x_1, z) \wedge \exists z_1 R(g(z_1, x_1), g(f(x), g(z, c)))) \rightarrow \exists z_1 (R(f(x), z_1) \vee \neg R(c, g(g(f(x), g(z, c)), z_1))) \right)$$

$$\varphi_{[u/z]} : \left( \forall x_1 (R(x_1, g(f(x), g(z, c))) \wedge \exists z_1 R(g(z_1, x_1), y)) \rightarrow \exists z_1 (R(f(x), z_1) \vee \neg R(c, g(y, z_1))) \right)$$

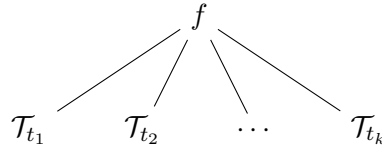
**Solution de l'exercice 2 :** Soit  $\mathcal{L}$  un langage du premier ordre. On définit pour tout terme  $t$  de  $\mathcal{L}$  l'arbre de décomposition  $\mathcal{T}_t$  de  $t$  par induction sur la hauteur de  $t$  de sorte que la hauteur de  $t$  égale la longueur de la plus longue branche de son arbre de décomposition.

- si  $t$  est de hauteur nulle, alors  $t$  est une variable ou une constante. Nous définissons  $\mathcal{T}_t$  par

$$t$$

La longueur de la plus longue branche est bien nulle comme la hauteur de  $t$ .

- si  $t$  est de hauteur  $n > 0$ , alors il existe un naturel  $k$ , il existe un symbole de fonction  $f \in \mathcal{L}$  d'arité  $k$  et il existe des termes  $t_1, \dots, t_k$  de hauteur respectivement  $h_1, \dots, h_k < n$  de sorte que  $t = f(t_1, \dots, t_k)$  (par définition d'un terme de hauteur  $k > 0$ ). Nous définissons alors  $\mathcal{T}_t$  par



Par hypothèse d'induction, nous avons que la hauteur de  $t_i$  égale la longueur de la plus longue branche de  $\mathcal{T}_{t_i}$  et ceci pour chaque  $i = 1, \dots, k$ . Il s'ensuit que la hauteur de  $t$  qui égale  $1 + \max\{h_i \mid i = 1, \dots, k\}$  est égale à la plus longue branche de  $\mathcal{T}_t$ .

**Solution de l'exercice 3 :** Soit  $\mathcal{L}$  un langage du premier ordre. Notons  $P$  le sous-ensemble de  $\mathcal{L}^{<\omega}$  des mots sur  $\mathcal{L}$  possédant autant de parenthèses ouvrantes que de parenthèses fermantes.

Nous commençons par montrer par induction sur la hauteur des termes, que l'ensemble des termes de  $\mathcal{L}$  est inclus dans  $P$ . Si  $t$  est un terme de hauteur nulle, alors  $t$  ne contient pas de parenthèses. Si  $t$  est de hauteur non nulle, alors il existe un naturel  $n$ , un symbole de fonction  $f \in \mathcal{L}$  d'arité  $n$ , et  $t_1, \dots, t_n$  des termes de hauteur strictement inférieure à la hauteur de  $t$  avec  $t = f(t_1, \dots, t_n)$ . Par hypothèse d'induction,  $t_1, \dots, t_n \in P$  et donc  $t \in P$ .

Nous montrons maintenant par induction sur la hauteur d'une formule, que l'ensemble des formules de  $\mathcal{L}$  est inclus dans  $P$ . Si  $\varphi$  est de hauteur nulle, alors il existe un naturel  $n$ , un symbole de relation  $R \in \mathcal{L}$  d'arité  $n$ , et  $t_1, \dots, t_n$  des termes de  $\mathcal{L}$  avec  $\varphi = R(t_1, \dots, t_n)$ . Par ce qui précède,  $t_1, \dots, t_n \in P$ . Il en

découle que  $\varphi \in P$ . Si  $\varphi$  est de hauteur non nulle  $h$ , alors nous sommes dans l'un des trois cas suivants :

- $\varphi = (\psi_1 \star \psi_2)$  avec  $\star \in \{\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow\}$  et  $\psi_1, \psi_2$  des formules de hauteur strictement inférieure à  $h$ . Par hypothèse d'induction,  $\psi_1, \psi_2 \in P$  et donc  $\varphi \in P$ .
- $\varphi = \neg\psi$  avec  $\psi$  de hauteur strictement inférieure à  $h$ . Alors, par hypothèse d'induction  $\varphi \in P$ .
- $\varphi = Qx\psi$  avec  $\psi$  de hauteur strictement inférieure à  $h$ . Alors, par hypothèse d'induction  $\varphi \in P$ .

**Solution de l'exercice 4 :** Dans les notations de la Série 1, nous avons  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}^{<\omega}$ . Ainsi, par les résultats de la Série 1 il s'ensuit qu'il existe un injection de  $\mathcal{F}$  dans  $\mathbb{N}$ . Puisque  $\mathcal{L}$  est un langage égalitaire, il contient le symbole d'égalité  $=$ . Pour chaque  $n \in \mathbb{N}$  nous avons la formule suivante

$$\varphi_n = \underbrace{\exists x \cdots \exists x}_{n+1 \text{ fois}}(x = x) \in \mathcal{F}.$$

L'application  $n \mapsto \varphi_n$  est un injection de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathcal{F}$ . On conclut par le théorème de Cantor-Schröder-Bernstein.

**Solution de l'exercice 5 :**

1. Notons  $[r]$  la partie entière d'un nombre réel  $r$ . L'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$  est en bijection avec  $\mathbb{Z} \times [0, 1[$  via  $r \mapsto ([r], r - [r])$ . De plus, nous avons vu dans la série 1 que  $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$  est en bijection avec  $\mathbb{Z}$ . Ainsi,

$$\mathbb{N} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{N} \times (\mathbb{Z} \times [0, 1]) \cong (\mathbb{N} \times \mathbb{Z}) \times [0, 1[ \cong \mathbb{Z} \times [0, 1[ \cong \mathbb{R}.$$

2. Supposons par l'absurde que  $n \mapsto x_n$  est un bijection entre  $\mathbb{N}$  et  $2^{\mathbb{N}}$ . Définissons alors la suite diagonale  $y \in 2^{\mathbb{N}}$  par  $y(n) = 1 - x_n(n)$ . Nous avons alors pour chaque  $n \in \mathbb{N}$  que  $y \neq x_n$  et donc l'application  $n \mapsto x_n$  n'est pas surjective contrairement à l'hypothèse.