Solutions de la série n°12

Solution de l'exercice 1 :

1.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi \vdash \varphi}\,{\scriptstyle ax}}{\vdash \neg\varphi, \varphi}\,{\scriptstyle \neg_d}}{\vdash \varphi \vee \neg\varphi}\,{\scriptstyle \mathrm{ctr}_d + \vee_{d_1} + \vee_{d_2}}$$

2.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi \vdash \varphi}\,{\scriptstyle ax}}{\varphi, \psi \vdash \varphi}\,{\scriptstyle \mathrm{aff}_g}}{\varphi \vdash \psi \to \varphi}\,{\scriptstyle \to_d}}{\vdash \varphi \to (\psi \to \varphi)}\,{\scriptstyle \to_d}$$

3.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\psi \vdash \psi}\,{\scriptstyle ax}}{\varphi, \psi \vdash \psi}\,{\scriptstyle \mathrm{aff}_g}}{\varphi \vdash \neg\psi, \psi}\,{\scriptstyle \neg_d} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi \vdash \varphi}\,{\scriptstyle ax}}{\varphi \vdash \varphi, \psi}\,{\scriptstyle \mathrm{aff}_d}}{\varphi, \neg\varphi \vdash \psi}\,{\scriptstyle \neg_g}}{\varphi, \neg\psi \to \neg\varphi \vdash \psi}\,{\scriptstyle \to_g}}{\neg\psi \to \neg\varphi \vdash \varphi \to \psi}\,{\scriptstyle \to_d}$$

4.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\psi \vdash \psi}\,{\scriptstyle ax}}{\varphi, \psi \vdash \psi}\,{\scriptstyle \mathrm{aff}_g} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\varphi \vdash \varphi}\,{\scriptstyle ax}}{\varphi, \psi \vdash \varphi}\,{\scriptstyle \mathrm{aff}_g}}{\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi}\,{\scriptstyle \wedge_d}}{\varphi, \psi, \neg(\varphi \wedge \psi) \vdash}\,{\scriptstyle \neg_g}}{\varphi, \neg(\varphi \wedge \psi) \vdash \neg\psi}\,{\scriptstyle \neg_d}}{\neg(\varphi \wedge \psi) \vdash \neg\varphi, \neg\psi}\,{\scriptstyle \neg_d}}{\neg(\varphi \wedge \psi) \vdash \neg\varphi \vee \neg\psi}\,{\scriptstyle \mathrm{ctr}_d + \vee_{d_1} + \vee_{d_2}}}{\vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \to (\neg\varphi \vee \neg\psi)}\,{\scriptstyle \to_d}$$

5.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi \vdash \varphi}\,{\scriptstyle ax}}{\vdash \neg\varphi, \varphi}\,{\scriptstyle \neg_d}}{\neg\neg\varphi \vdash \varphi}\,{\scriptstyle \neg_g}}{\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi}\,{\scriptstyle \to_d}}{\neg(\neg\neg\varphi \to \varphi) \vdash}\,{\scriptstyle \neg_g}}{\vdash \neg\neg(\neg\neg\varphi \to \varphi)}\,{\scriptstyle \neg_d}$$

La preuve 2. est faite en logique minimale et les preuves 1., 3., 4. et 5. sont faites en logique classique. Nous précisons qu'il existe une autre preuve pour 5. en logique intuitionniste.

Solution de l'exercice 2 :

1. a) φ_1 : $\forall x \forall y \forall z((Rxy \wedge Ryz) \to Rxz)$;
   b) φ_2 : $\forall x \neg Rxx$;
   c) φ_3 : $\exists x \forall y \neg Ryx$;
   d) φ_4 : $\forall x \forall y(Rxy \to \neg Ryx)$.
   e) φ_5 : $\forall x(f(x) = x)$.
   f) φ_6 : $\forall x Rxf(x)$.
   g) φ_7 : $\forall x Rxx$.

2. a) Voici une déduction dans le système de déduction naturelle du séquent proposé, où u et v sont des variables nouvelles (différentes de x, y et z).

$$
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{}{\forall x \neg Rxx \vdash \forall x \neg Rxx}\,{\scriptstyle ax}}{\forall x \neg Rxx \vdash \neg Ruu}\,{\scriptstyle \forall e}
\qquad
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x\forall y\forall z((Rxy \wedge Ryz) \to Rxz) \vdash \forall x\forall y\forall z((Rxy \wedge Ryz) \to Rxz)}\,{\scriptstyle ax}}{\forall x\forall y\forall z((Rxy \wedge Ryz) \to Rxz) \vdash \forall y\forall z((Ruy \wedge Ryz) \to Ruz)}\,{\scriptstyle \forall e}}{\forall x\forall y\forall z((Rxy \wedge Ryz) \to Rxz) \vdash \forall z((Ruv \wedge Rvz) \to Ruz)}\,{\scriptstyle \forall e}}{\forall x\forall y\forall z((Rxy \wedge Ryz) \to Rxz) \vdash ((Ruv \wedge Rvu) \to Ruu)}\,{\scriptstyle \forall e}
\quad
\dfrac{\dfrac{}{Ruv \vdash Ruv}\,{\scriptstyle ax} \quad \dfrac{}{Rvu \vdash Rvu}\,{\scriptstyle ax}}{Ruv,\ Rvu \vdash (Ruv \wedge Rvu)}\,{\scriptstyle \wedge i}
}{\forall x\forall y\forall z((Rxy \wedge Ryz) \to Rxz),\ Ruv,\ Rvu \vdash Ruu}\,{\scriptstyle \to e}
}{
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\forall y\forall z((Rxy \wedge Ryz) \to Rxz),\ \forall x \neg Rxx,\ Ruv,\ Rvu \vdash \bot}{\forall x\forall y\forall z((Rxy \wedge Ryz) \to Rxz),\ \forall x \neg Rxx,\ Ruv \vdash \neg Rvu}\,{\scriptstyle \neg i}}{\forall x\forall y\forall z((Rxy \wedge Ryz) \to Rxz),\ \forall x \neg Rxx \vdash (Ruv \to \neg Rvu)}\,{\scriptstyle \to i}}{\forall x\forall y\forall z((Rxy \wedge Ryz) \to Rxz),\ \forall x \neg Rxx \vdash \forall y(Ruy \to \neg Ryu)}\,{\scriptstyle \forall i}}{\forall x\forall y\forall z((Rxy \wedge Ryz) \to Rxz),\ \forall x \neg Rxx \vdash \forall x\forall y(Rxy \to \neg Ryx)}\,{\scriptstyle \forall i}
}\,{\scriptstyle \neg e}
$$

   b) Non $\varphi_1, \varphi_2 \nvdash_c \varphi_3$. Par le théorème de complétude, il suffit de montrer qu'il existe une $\mathcal{L}$-structure qui satisfait φ_1 et φ_2 mais pas φ_3. Car dans ce cas $\varphi_1, \varphi_2 \nvDash \varphi_3$ et par le théorème de complétude nous avons le résultat souhaité. La $\mathcal{L}$-structure $(\mathbb{Z}, <)$ des entiers relatifs avec l'ordre strict convient.

   c) Voici une déduction en déduction naturelle du séquent proposé :

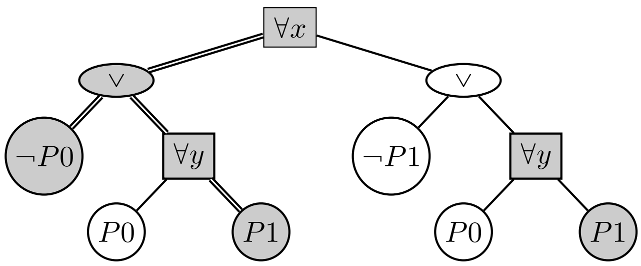
$$
\begin{array}{c}
\varphi(x) = Rvx \\ u = v \\ t = f(v)
\end{array}
\quad
\dfrac{\dfrac{
\dfrac{\dfrac{}{\forall x fx = x \vdash \forall x fx = x}\,{\scriptstyle ax}}{\forall x fx = x \vdash fv = v}\,{\scriptstyle \forall e}
\qquad
\dfrac{\dfrac{}{\forall x Rxfx \vdash \forall x Rxfx}\,{\scriptstyle ax}}{\forall x Rxfx \vdash Rvfv}\,{\scriptstyle \forall e}
}{\forall x fx = x,\ \forall x Rxfx \vdash Rvv}\,{\scriptstyle =e}}{\forall x fx = x,\ \forall x Rxfx \vdash \forall x Rxx}\,{\scriptstyle \forall i}
$$

   d) Au vu du point précédent, on se doute que la théorie $\{\varphi_5, \varphi_6, \varphi_2\}$ est inconsistante. Le séquent proposé est en effet déductible en logique classique :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x \neg Rxx \vdash \forall x \neg Rxx}\,{\scriptstyle ax}}{\forall x \neg Rxx \vdash \neg Rvv}\,{\scriptstyle \forall e} \qquad \dfrac{\text{Nous avons déjà fait cette preuve au point précédent !}}{\forall x fx = x,\ \forall x Rxfx \vdash Rvv}}{\forall x fx = x,\ \forall x Rxfx,\ \forall x \neg Rxx \vdash \bot}\,{\scriptstyle \neg e}}{\forall x fx = x,\ \forall x Rxfx,\ \forall x \neg Rxx,\ \neg\varphi_3 \vdash \bot}\,{\scriptstyle aff}}{\forall x fx = x,\ \forall x Rxfx,\ \forall x \neg Rxx \vdash \varphi_3}\,{\scriptstyle \bot c}$$

Solution de l'exercice 3 :

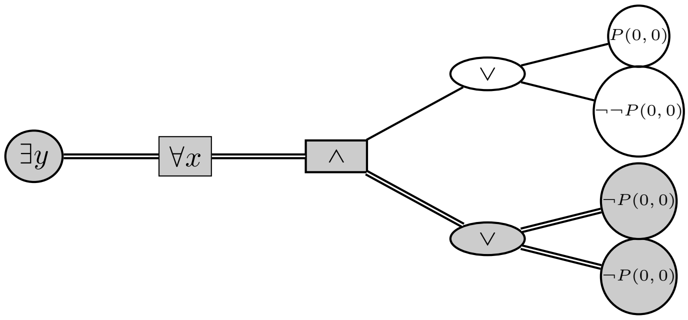
1. $\vdash \forall x(P(x) \to \forall y P(y))$: On considère la structure $\mathcal{M} = \langle \{0,1\}, P^{\mathcal{M}} = \{0\}\rangle$. Nous avons $\mathcal{M} \not\models \forall x(P(x) \to \forall y P(y))$. En effet, l'unique stratégie gagnante pour le falsificateur dans le jeu d'évaluation de $\varphi_1\ :\ \forall x(P(x) \to \forall y P(y)) \equiv \forall x(\neg P(x) \vee \forall y P(y))$ dans $\mathcal{M}$ consiste à choisir 0 pour x, puis, dans le cas où le vérificateur choisit le second membre de la disjonction, à choisir 1 pour y.



   Puisqu'il existe une structure dans laquelle φ_1 n'est pas satisfaite, nous avons $\not\models \varphi_1$. Par le théorème de complétude, ceci est équivalent à $\not\vdash_c \varphi_1$.

2. $\vdash \forall x(P(x) \to Q(x)) \to (\exists y P(y) \to \forall z Q(z))$: La structure $\mathcal{M}$ de domaine $\{0,1\}$ avec $P^{\mathcal{M}} = Q^{\mathcal{M}} = \{0\}$ convient. En effet, $\mathcal{M} \not\models \forall z Q(z)$ mais $\mathcal{M} \models \exists y P(y)$. Ainsi $\mathcal{M} \not\models (\exists y P(y) \to \forall z Q(z))$. Or $\mathcal{M} \models \forall x(P(x) \to Q(x))$ et donc l'affirmation en découle.

3. $\vdash \exists y \forall x\,((P(x,y) \to \neg P(x,x)) \wedge (\neg P(x,x) \to P(x,y)))$: Pour $\mathcal{M} = \langle \{0\}, P^{\mathcal{M}} = \{(0,0)\}\rangle$ le falsificateur possède une stratégie dans le jeu d'évaluation de la formule considérée.



4. $\vdash \forall x \exists y P(x,y) \to \exists y P(y,y)$: Nous pouvons considérer la structure $\mathcal{M}$ donnée par $\langle \{0,1\}, P^{\mathcal{M}} = \{(0,1),(1,0)\}\rangle$. D'une part, la prémisse de l'implication est satisfaite dans M, i.e. $\mathcal{M} \models \forall x \exists y P(x,y)$ car le vérificateur choisit $1-b$ lorsque le falsificateur choisit $b \in \{0,1\}$ et on a bien $(b, 1-b) \in P^{\mathcal{M}}$ pour tout $b \in \{0,1\}$. D'autre part, la conclusion n'est pas satisfaite dans $\mathcal{M}$, i.e. $\mathcal{M} \not\models \exists y P(y,y)$ car ni $(0,0)$ ni $(1,1)$ n'appartiennent à $P^{\mathcal{M}}$.
5. $\vdash \forall x(\neg x \simeq c \to \exists y\ x \simeq s(y))$. Considérons la structure $\mathcal{M}$ donnée par $\langle \{0,1\}, c^{\mathcal{M}} = 0, s^{\mathcal{M}} = \{(0,0),(1,0)\}\rangle$. Une stratégie gagnante pour le falsificateur dans le jeu d'évaluation correspondant consiste à choisir 1 pour x, de sorte que la prémisse de l'implication est vérifiée mais pas sa conclusion. En effet, ni $s^{\mathcal{M}}(0) = 1$ ni $s^{\mathcal{M}}(1) = 1$.