

Solutions de la série n°10

Solution de l'exercice 1 :

1. On étend le langage \mathcal{L} en en langage $\mathcal{L}_d = \mathcal{L} \cup \{d\}$ où d est symbole de constante. Nous considérons alors la théorie sur \mathcal{L}_d donnée par :

$$T = T_{\text{arith}} \cup \{R(\underline{n}, d) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Cette théorie est finiment satisfaisable.

Pour voir ceci, soit $F \subseteq T$ une sous-théorie finie. Puisque F est fini il existe $M = \max\{n \mid R(\underline{n}, d) \in F\} \in \mathbb{N}$. Considérons la \mathcal{L}_d -structure \mathcal{N}_F obtenue de la \mathcal{L} -structure \mathcal{N} en définissant l'interprétation du symbole de constante d par $M + 1 \in |\mathcal{N}| = \mathbb{N}$. D'une part, $\mathcal{N}_F \models T_{\text{arith}}$ car T_{arith} est une \mathcal{L} -théorie et par hypothèse $\mathcal{N} \models T_{\text{arith}}$. D'autre part, pour toute formule atomique de la forme $R(\underline{n}, d)$ appartenant à F , nous avons $\mathcal{N}_F \models R(\underline{n}, d)$ car $(\underline{n}^{\mathcal{N}_F}, d^{\mathcal{N}_F}) = (n, M + 1) \in R^{\mathcal{N}_F} = \{(k, l) \in \mathbb{N}^2 \mid k < l\}$ par définition de \mathcal{N}_F . Par conséquent $\mathcal{N}_F \models F$ et T est finiment satisfaisable.

Par le théorème de compacité, il existe une \mathcal{L}_d -structure \mathcal{M}' telle que $\mathcal{M}' \models T$. Cette \mathcal{L}_d -structure est infinie puisque elle contient l'interprétation de tous les termes \underline{n} pour $n \in \mathbb{N}$ et que pour tous $m, n \in \mathbb{N}$ distincts $\mathcal{N} \models \neg \underline{n} = \underline{m}$.

Puisque \mathcal{L}_d est fini et que T admet un modèle infini (p.ex. \mathcal{M}') il existe par le théorème de Löwenheim-Skolem descendant une \mathcal{L}_d -structure \mathcal{M}'' de domaine dénombrable et telle que $\mathcal{M}'' \models T$. En oubliant l'interprétation du symbole de constante d , on transforme \mathcal{M}'' en une \mathcal{L} -structure \mathcal{M} telle que $\mathcal{M} \models T_{\text{arith}}$ et pour $a = d^{\mathcal{M}''} \in |\mathcal{M}|$ nous avons $\mathcal{M} \models R(\underline{n}, a)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit \mathcal{M} une \mathcal{L} -structure satisfaisant les hypothèses du point précédent.

Si f est un homomorphisme de \mathcal{N} dans \mathcal{M} , alors nécessairement $f(0) = c_0^{\mathcal{M}} = \underline{0}^{\mathcal{M}}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(n + 1) = f(n) \oplus^{\mathcal{M}} c_1^{\mathcal{M}} = \underline{n}^{\mathcal{M}} \oplus^{\mathcal{M}} c_1^{\mathcal{M}} = \underline{n + 1}^{\mathcal{M}}.$$

Or il existe $a \in |\mathcal{M}|$ tel que $\mathcal{M} \models R(\underline{n}, a)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc en particulier $\mathcal{M} \models \neg \underline{n} = a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ car $\mathcal{N} \models \forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow \neg x = y)$. Par conséquent f n'est pas surjective et ne peut donc être un isomorphisme.

On considère l'ensemble $\mathcal{C} = |\mathcal{M}| \setminus \{\underline{n}^{\mathcal{M}} \mid n \in \mathbb{N}\}$ muni de la relation d'ordre $R^{\mathcal{M}} \cap (\mathcal{C} \times \mathcal{C})$. Soit $a \in \mathcal{C}$. Puisque $\mathcal{N} \models \forall x (\neg x = c_0 \rightarrow \exists y y \oplus c_1 = x)$ et que $a \neq c_0^{\mathcal{M}} = \underline{0}^{\mathcal{M}}$, il s'ensuit qu'il existe $b \in |\mathcal{M}|$ tel que $b \oplus^{\mathcal{M}} c_1^{\mathcal{M}} = a$. Nous avons $b \in \mathcal{C}$ et donc a n'est pas minimal. En effet, si $b = \underline{n}^{\mathcal{M}}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, alors $a = b \oplus^{\mathcal{M}} c_1^{\mathcal{M}} = \underline{n+1}$ et donc $a \notin \mathcal{C}$, contradiction.

3. On étend le langage \mathcal{L} en un langage \mathcal{L}_E en lui ajoutant un ensemble de nouveaux symboles de constante $\{d_e \mid e \in E\}$. Puisque E est dénombrable, \mathcal{L}_E l'est aussi. On considère alors la théorie sur \mathcal{L}_E donnée par

$$T_E = T_{\text{arith}} \cup \{-d_e = d_{e'} \mid e, e' \in E \text{ et } e \neq e'\} \cup \{R(d_e, d_{e'}) \mid e, e' \in E \text{ et } e < e'\}.$$

On vérifie en prouvant par induction sur la cardinalité que tout ordre strict total fini est un bon ordre fini et donc isomorphe à un ordinal fini. Ainsi, pour toute sous-théorie finie $F \subseteq T_E$ l'ensemble $E_F = \{e \in E \mid d_e \text{ apparaît dans une formule de } F\}$ muni de la restriction de $<$ est un bon ordre fini isomorphe à un certain entier n via $\phi : E_F \rightarrow n$. Considérons alors la \mathcal{L}_E structure \mathcal{N}_F obtenue de \mathcal{N} en interprétant les symboles de constante ajoutés de la façon suivante :

$$d_e^{\mathcal{N}_F} = \begin{cases} \phi(e) & \text{si } e \in E_F, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous avons alors $\mathcal{N}_F \models F$ et donc T_E est finiment satisfaisable. Par le Théorème de compacité et le Théorème de Löwenheim-Skolem descendant, il existe un modèle dénombrable \mathcal{M}' de T_E . En oubliant les interprétations des symboles de constante ajoutés, on obtient une \mathcal{L} -structure \mathcal{M} telle que $\mathcal{M} \models T_{\text{arith}}$ et telle que la fonction $f : E \rightarrow |\mathcal{M}|$ donnée par $e \mapsto d_e^{\mathcal{M}'}$ est un plongement.

4. Dans l'argument donné au point précédent, on n'utilise le fait que E est dénombrable seulement pour dire que \mathcal{L}_E est dénombrable et qu'ainsi une théorie sur \mathcal{L}_E qui admet un modèle infini admet un modèle dénombrable par le Théorème de Löwenheim-Skolem. Si E est de cardinalité fini, alors on a vu qu'il se plonge dans $\langle \mathbb{N}, < \rangle$. Si E est de cardinalité infinie quelconque κ , alors le langage \mathcal{L}_E est de cardinalité κ et donc le théorème de Löwenheim-Skolem nous permet d'assurer que la théorie T_E , qui admet un modèle infini, possède un modèle de cardinalité κ . Il s'ensuit que tout ordre strict total de cardinalité infinie κ se plonge dans un modèle de T_{arith} de cardinalité κ .

Solution de l'exercice 2 :

1. On montre le théorème suivant :

Théorème. *Soit T une théorie non contradictoire du premier ordre sur un langage \mathcal{L} dénombrable, et telle que T ne possède pas de modèle fini. Si tous les modèles dénombrables de T sont élémentairement équivalents, alors T est complète.*

Démonstration. Soit T une théorie non contradictoire du premier ordre sur un langage \mathcal{L} dénombrable, et telle que T ne possède pas de modèle fini. Nous montrons la contraposée : si T n'est pas complète, alors elle admet deux modèles dénombrables non élémentairement équivalents. Supposons donc que T n'est pas complète. Comme T est consistante, elle admet donc au moins deux modèles non élémentairement équivalents. Il existe donc une formule close Φ de \mathcal{L} et deux \mathcal{L} -structures \mathcal{M} et \mathcal{N} telles que $\mathcal{M} \models T$, $\mathcal{N} \models T$, $\mathcal{M} \models \Phi$ et $\mathcal{N} \models \neg\Phi$. Puisque T n'admet pas de modèles finis, \mathcal{M} et \mathcal{N} sont infinis. Considérons les théories $\text{Th}(\mathcal{M})$ et $\text{Th}(\mathcal{N})$ des modèles \mathcal{M} et \mathcal{N} respectivement. Ces théories sont sur un langage dénombrable et elles possèdent chacune un modèle infini. Par Löwenheim-Skolem descendant elles admettent respectivement des modèles \mathcal{M}' et \mathcal{N}' dénombrables. Or $\Phi \in \text{Th}(\mathcal{M})$ et $\neg\Phi \in \text{Th}(\mathcal{N})$ et donc $\mathcal{M}' \models \Phi$ et $\mathcal{N}' \models \neg\Phi$. Les \mathcal{L} -structures dénombrables \mathcal{M}' et \mathcal{N}' ne sont donc pas élémentairement équivalentes. Toutefois elles satisfont la théorie T car $T \subseteq \text{Th}(\mathcal{M})$ et $T \subseteq \text{Th}(\mathcal{N})$. Ceci conclut la preuve. \square

2. En déduire le corollaire suivant :

Corollaire. *Soit T une théorie non contradictoire du premier ordre sur un langage dénombrable, et telle que T ne possède pas de modèle fini. Si tous les modèles dénombrables de T sont isomorphes, alors T est complète.*

Démonstration. Si tous les modèles dénombrables de T sont isomorphes, alors ils sont tous élémentairement équivalents. \square

3. Voici une axiomatisation des ordres denses sans premier ni dernier élément dans le langage du premier ordre égalitaire contenant le symbole de relation R :

$$\varphi_1 : \forall x \neg Rxx$$

$$\varphi_2 : \forall x \forall y \forall z ((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)$$

$$\varphi_3 : \forall x \forall y (\neg x = y \rightarrow \exists z ((Rxz \wedge Rzy) \vee (Ryz \wedge Rzx)))$$

$$\varphi_4 : (\forall x \exists y Ryx \wedge \forall x \exists y Rxy)$$

$$\varphi_5 : \exists x \exists y (\neg x = y)$$

$$\varphi_6 : \forall x \forall y ((\neg x = y) \rightarrow (Rxy \vee Ryx))$$

Montrons qu'une structure qui satisfait ces formules est nécessairement infinie. Soit $\langle M, < \rangle$ une telle structure et soit $a_0 \in M$. Par φ_4 il existe $a_1 \in M$ tel que $a_0 < a_1$. Par φ_1 nous avons $a_0 \neq a_1$. Par induction, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe a_0, \dots, a_n tels que $a_k < a_{k+1}$ pour tout $0 \leq k < n$. Ces éléments sont nécessairement distincts par φ_1 et donc on conclut que \mathbb{N} s'injecte dans M . Ainsi M est infini.

En utilisant le fait que tous les modèles dénombrables de cette théorie sont isomorphes, le corollaire ci-dessus nous permet de conclure que la théorie des ordres denses sans premier ni dernier élément est complète.

Solution de l'exercice 3 : Nous notons κ la cardinalité de l'ensemble des classes d'isomorphisme de modèles dénombrables de T_{arithm} .

1. Observons que à isomorphisme près toute \mathcal{L}_0 -structure dénombrable est la donnée d'un élément de \mathbb{N} , d'une fonction unaire et de deux fonctions de \mathbb{N}^2 dans \mathbb{N} . Par conséquent,

$$\kappa \leq |\mathbb{N} \times \mathcal{P}(\mathbb{N}^2) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}^3) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}^3)| \leq 2^{\aleph_0}.$$

2. Soit \mathbb{P} l'ensemble de tous les nombres premiers. Notons $x|y$ la formule de \mathcal{L}_0 donnée par $\exists z(x \times z = y)$. Pour tout modèle dénombrable \mathfrak{M} de T_{arithm} et tout élément $a \in |\mathfrak{M}|$ notons $\text{Div}_{\mathfrak{M}}(a)$ l'ensemble des nombres premiers qui divisent a dans \mathfrak{M} , formellement

$$\text{Div}_{\mathfrak{M}}(a) = \{p \in \mathbb{P} \mid \mathfrak{M} \models p|a\}$$

où p désigne $\overbrace{\underline{S} \cdots \underline{S}}^{p \text{ fois}}(\underline{0})$. Nous posons ensuite

$$D = \left\{ P \subseteq \mathbb{P} \mid \begin{array}{l} \text{il existe un modèle dénombrable } \mathfrak{M} \text{ de } T_{\text{arithm}} \\ \text{et } a \in |\mathfrak{M}| \text{ tel que } P = \text{Div}_{\mathfrak{M}}(a) \end{array} \right\}.$$

Nous montrons que $D = \mathcal{P}(\mathbb{P})$. Soit P un sous-ensemble quelconque de \mathbb{P} . Désignons par \underline{c} un nouveau symbole de constante et notons $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \cup \{\underline{c}\}$ le langage étendu. Nous définissons la \mathcal{L} -théorie

$$T_P = T_{\text{arithm}} \cup \{p|\underline{c} \mid p \in P\} \cup \{\neg p|\underline{c} \mid p \in \mathbb{P} \setminus P\},$$

La théorie T_P est finiment satisfaisable car pour tout sous-ensemble fini F de P , nous pouvons interpréter \underline{c} dans \mathbb{N} comme le produit (fini) des

nombres premiers appartenant à F . Par le théorème de compacité, T_P est satisfaisable. De plus, par le théorème de Löwenheim-Skolem descendant il existe une \mathcal{L} -structure dénombrable \mathfrak{M}_P qui est modèle de T_P . Pour l'interprétation du symbole de constante $\underline{c}^{\mathfrak{M}_P}$ dans la \mathcal{L}_0 -structure $\widetilde{\mathfrak{M}}_P$ obtenue de \mathfrak{M}_P en oubliant l'interprétation de \underline{c} nous avons que

$$\text{Div}_{\widetilde{\mathfrak{M}}_P}(\underline{c}^{\mathfrak{M}_P}) = P.$$

Puisque $\widetilde{\mathfrak{M}}_P$ est une \mathcal{L}_0 -structure dénombrable modèle de T_{arithm} , nous avons montré que $P \in D$. Par conséquent $D = \mathcal{P}(\mathbb{P})$.

3. Nous notons

$$D_{\mathfrak{M}} = \{P \subseteq \mathbb{P} \mid \text{il existe } a \in |\mathfrak{M}| \text{ tel que } P = \text{Div}_{\mathfrak{M}}(a)\}$$

la contribution à D d'un modèle dénombrable \mathfrak{M} de T_{arithm} . Nous montrons à présent que deux modèles isomorphes contribuent de façon identique à l'ensemble D . Soient \mathfrak{M} et \mathfrak{M}' deux modèles dénombrables de T_{arithm} et f un isomorphisme de \mathfrak{M} sur \mathfrak{M}' . Par définition d'un homomorphisme, f envoie $\underline{0}^{\mathfrak{M}}$ sur $\underline{0}^{\mathfrak{M}'}$ et on montre alors par induction que f envoie $\underline{n}^{\mathfrak{M}}$ sur $\underline{n}^{\mathfrak{M}'}$ pour tout nombre naturel n . Ainsi, nous avons pour tout $a \in |\mathfrak{M}|$ et tout $p \in \mathbb{P}$ que

$$\mathfrak{M} \models \underline{p}|a \quad \text{iff} \quad \mathfrak{M}' \models \underline{p}|f(a)$$

car si $\mathfrak{M} \models \underline{p}|a$ alors il existe $b \in |\mathfrak{M}|$ tel que $\underline{p}^{\mathfrak{M}} \otimes^{\mathfrak{M}} b = a$ et comme f est un homomorphisme, $f(\underline{p}^{\mathfrak{M}}) \otimes^{\mathfrak{M}'} f(b) = f(a)$ et donc $\mathfrak{M}' \models \underline{p}|f(a)$. Par conséquent,

$$\text{Div}_{\mathfrak{M}}(a) = \text{Div}_{\mathfrak{M}'}(f(a)).$$

Puisque f est une bijection, \mathfrak{M} et \mathfrak{M}' contribuent à D de façon identique, i.e. $D_{\mathfrak{M}} = D_{\mathfrak{M}'}$. Par ailleurs, pour tout modèle dénombrable de T_{arithm} , $|\mathfrak{M}| = \aleph_0$ implique $D_{\mathfrak{M}} \leq \aleph_0$. Ainsi, $|D| \leq \kappa \cdot \aleph_0$.

4. Nous avons

$$2^{\aleph_0} = \text{Card}(\mathcal{P}(\mathbb{P})) = \text{Card}(D) \leq \kappa \cdot \aleph_0 = \max\{\kappa, \aleph_0\},$$

ce qui, avec $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$, implique $\kappa = 2^{\aleph_0}$. Ceci achève la preuve.