

1. Soit une suite orthonormée totale  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  d'un espace préhilbertien  $X$ . Soit aussi  $T \in \mathcal{L}(X)$  tel que chaque  $e_n$  est un vecteur propre de  $T$  et notons par  $\lambda_n \in \mathbb{F}$  la valeur propre correspondante. Prouver que

$$\forall x \in X \quad Tx = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n$$

en précisant la signification de la somme infinie.

*Indication:* exercice 3 de la série 7.

2. Soit  $p \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$  satisfaisant  $\min_{t \in [0, 1]} p(t) > 0$  et  $\int_0^1 p^{-1}(t) dt = 1$ .

Posons  $q(t) = \int_0^t p^{-1}(s) ds$  et définissons l'opérateur intégral  $K : C([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow C([0, 1], \mathbb{R})$  par  $(Kf)(s) := \int_0^1 k(s, t) f(t) dt$ , où

$$k(s, t) = \begin{cases} \{1 - q(s)\}q(t) & \text{si } 0 \leq t \leq s \leq 1, \\ \{1 - q(t)\}q(s) & \text{si } 0 \leq s \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Montrer que, pour tous  $u, f \in C([0, 1], \mathbb{R})$ ,  $u = Kf$  ssi

$$\begin{cases} -\{p(s)u'(s)\}' = f(s) & \text{sur } [0, 1], \\ u(0) = u(1) = 0, \\ u \in C^2([0, 1], \mathbb{R}). \end{cases}$$

3. A partir du théorème d'approximation de Weierstrass (voir le corrigé de l'exercice 4 de la série 2), expliquer pourquoi

$$\{u \in C^2([0, 1], \mathbb{R}) : u(0) = u(1) = 0\}$$

est dense dans  $(C([0, 1], \mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .

4. Soit  $p \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$  tel que  $\min_{t \in [0, 1]} p(t) > 0$  et  $\int_0^1 p^{-1}(t) dt = 1$ . Montrer l'existence d'une suite  $\{\mu_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}$  et d'une suite orthonormée totale  $\{e_n\}_{n \geq 1}$  de  $(C([0, 1], \mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$  telles que

$$\begin{cases} -\{p(s)e_n'(s)\}' = \mu_n e_n(s) & \text{sur } [0, 1], \\ e_n(0) = e_n(1) = 0, \\ e_n \in C^2([0, 1], \mathbb{R}), \end{cases}$$

et  $\mu_n \rightarrow +\infty$ . Discuter le cas  $p = 1$  sur  $[0, 1]$ .

*Indication:* appliquer le Corollaire IV.8 et le problème 2 ci-dessus.

5. Soient un espace de Banach  $X \neq \{0\}$  et  $T \in \mathcal{L}(X)$ . Pour  $\lambda, \mu \in \rho(T)$ , montrer l'“équation de la résolvante”

$$(T - \lambda I)^{-1} - (T - \mu I)^{-1} = (\lambda - \mu)(T - \lambda I)^{-1}(T - \mu I)^{-1}$$

6. Soit  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , un espace de Hilbert séparable de dimension infinie (sur  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ). Prouver qu'il existe un opérateur linéaire bijectif  $T : H \rightarrow l^2$  tel que

$$\forall x \in H \quad \forall \alpha \in l^2 \quad \langle x, T^{-1}\alpha \rangle = \langle Tx, \alpha \rangle,$$

où le produit scalaire de  $l^2$  apparaît à droite de l'égalité. En déduire que

$$\forall x \in H \quad \forall y \in H \quad \langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle.$$