

1. Soient des evn  $X$  et  $Y$ , et soit  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Prouver que  $T$  est compact si  $T|_Z$  est compact pour un certain sous-espace vectoriel dense  $Z \subset X$ .
2. Soit  $X = C[0, 1]$  muni de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ . Prouver que l'opérateur linéaire  $T \in \mathcal{L}(C[0, 1], l^1)$  défini pour tout  $f \in C[0, 1]$  par

$$Tf = \left( \int_{1/(k+1)}^{1/k} f(t) dt \right)_{k \geq 1}$$

est compact.

*Indication:* appliquer le Théorème III.13 et le problème 5 de la série 4.

3. Soit l'opérateur linéaire  $T : l^2 \rightarrow l^2$  défini par  $T\xi = \eta$  si  $\eta_k = \sum_{l=1}^{\infty} \lambda_{k,l} \xi_l$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , où les  $\lambda_{k,l} \in \mathbb{F}$  satisfont  $\sum_{k,l=1}^{\infty} |\lambda_{k,l}|^2 < \infty$ .

Prouver que  $T$  est compact.

*Indication:* appliquer le Théorème III.13 et les problèmes 1 et 5 de la série 4.

4. Montrer que l'opérateur intégral  $K : (C[a, b], \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (C[a, b], \langle \cdot, \cdot \rangle)$  défini au paragraphe III.2 est symétrique si  $k(s, t) = \overline{k(t, s)}$  pour tous  $s, t \in [a, b]$ .

5. Si  $X$  est un espace préhilbertien et  $A \in \mathcal{L}(X)$  est symétrique, montrer que

$$N(A) = R(A)^\perp := \{x \in X : \langle x, z \rangle = 0 \text{ pour tout } z \in R(A)\}.$$

6. Soit un evn  $X$  sur  $\mathbb{F}$ , un opérateur linéaire compact  $T : X \rightarrow X$ ,  $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$  et  $T_\lambda := T - \lambda I$ , où  $I : X \rightarrow X$  est l'opérateur identité. Prouver que

$$N(T_\lambda) = \{0\} \Rightarrow R(T_\lambda) = X.$$

7. Avec les mêmes hypothèses et notations que ci-dessus, prouver que, pour tout  $n \in \mathbb{N}_0$ ,

$$N(T_\lambda^n) = N(T_\lambda^{n+1}) \Leftrightarrow R(T_\lambda^n) = R(T_\lambda^{n+1}).$$