

1. Soit l'opérateur linéaire  $T : l^2 \rightarrow l^2$  défini par  $T\xi = \eta$  si  $\eta_k = \sum_{l=1}^{\infty} \lambda_{k,l} \xi_l$ , où les  $\lambda_{k,l} \in \mathbb{F}$  satisfont  $\sum_{k,l=1}^{\infty} |\lambda_{k,l}|^2 < \infty$ . Prouver que  $T$  est borné et donner une borne supérieure pour sa norme.

2. Soit un espace de Banach  $(X, \|\cdot\|)$ . Pour  $T \in \mathcal{L}(X)$ , posons  $S_n(T) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} T^k$ , où  $T^0 = I$  et  $T^k$  est l'opérateur  $T$  composé  $k$  fois avec lui-même lorsque  $k \geq 1$ . Prouver que

(a) la suite  $\{S_n(T)\}_{n \geq 0}$  est convergente dans  $\mathcal{L}(X)$ ; sa limite est notée  $\exp(T)$ ;

*Indication:* pour  $t \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , poser  $\sigma_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} t^k$  et utiliser  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(\|T\|) = e^{\|T\|}$

(b)  $\exp(0) = I$  et  $\exp(L+T) = \exp(L) \circ \exp(T)$  pour tous  $L, T \in \mathcal{L}(X)$  tels que  $L \circ T = T \circ L$ .

*Indication:*  $S_n(L) \circ S_n(T) - S_n(L+T) = \sum_{0 \leq k, l \leq n, k+l \geq n+1} \frac{1}{k!l!} L^k \circ T^l$

3. Donner un exemple d'un evn  $(X, \|\cdot\|)$  tel que l'opérateur identité  $I \in \mathcal{L}(X)$  n'est pas compact.

4. Soient des evn  $X, Y$  et  $Z$ .

(a) Prouver que l'ensemble de tous les opérateurs compacts  $T : X \rightarrow Y$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(X, Y)$ .

(b) Pour  $S \in \mathcal{L}(X, Y)$  et  $T \in \mathcal{L}(Y, Z)$ , montrer que  $T \circ S$  est compact si  $S$  ou  $T$  l'est.

5. Soient des evn  $X$  et  $Y$ , et soit  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Prouver que  $T$  est compact si  $\dim R(T) < \infty$ .

*Rappel:* dans  $\mathbb{F}^n$ , toutes les normes sont équivalentes (voir l'exercice 2 de la série 3).

6. Soit les opérateurs linéaires  $S, T, P : l_{\mathbb{F}}^{\infty} \rightarrow l_{\mathbb{F}}^{\infty}$  définis par

$$Sx = (x_2, x_3, x_4, \dots), \quad Tx = (0, x_1, x_2, x_3, x_4, \dots), \quad Px = (0, x_2, x_3, x_4, \dots)$$

pour  $x = (x_1, x_2, \dots) \in l^{\infty}$ .

Vérifier qu'ils sont bornés et calculer leurs normes. Etudier s'ils sont ou non injectifs/surjectifs. Déterminer  $S \circ T$  et  $T \circ S$ .