

1. Soient un espace métrique  $(M, d)$  et  $A \subset M$ . On définit l'*adhérence* ou *fermeture* de  $A$ , notée  $\overline{A}$ , comme l'intersection de tous les fermés contenant  $A$  (observons que  $M$  lui-même est un fermé contenant  $A$ ). Vérifier que  $\overline{A}$  est fermé. Pour  $x \in M$ , prouver que les affirmations suivantes sont équivalentes:

- (a)  $x \in \overline{A}$ ,
- (b)  $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$  pour tout  $r > 0$ ,
- (c) il existe une suite  $(a_n) \subset A$  telle que  $a_n \rightarrow x$ .

On dit que  $A$  est *dense* (dans  $M$ ) si  $\overline{A} = M$ .

Prouver que les affirmations suivantes sont équivalentes:

- (i)  $A$  est dense,
- (ii)  $\forall x \in M \forall r > 0 \ B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ ,
- (iii) pour tout  $x \in M$ , il existe une suite  $(a_n) \subset A$  telle que  $a_n \rightarrow x$ .

## 2. Complétion d'un espace métrique.

Soient deux espaces métriques  $(X, d)$  et  $(X', d')$ . Une application  $\Phi : X \rightarrow X'$  est une *isométrie* si, par définition,

$$\forall a \in X \forall b \in X \ d'(\Phi(a), \Phi(b)) = d(a, b).$$

Si, de plus,  $\Phi$  est bijective,  $(X, d)$  et  $(X', d')$  sont dits *isométriques*.

Soit un espace métrique  $(X, d)$ . Montrer qu'il existe un espace métrique complet  $(X^*, d^*)$  et un sous-ensemble  $D \subset X^*$  dense dans  $X^*$  tel que  $(X, d)$  et le sous-espace métrique  $(D, d_D^*)$  sont isométriques.

*Indication.* Voir l'exercice 4 de la série 1.

*Remarques.* On dit que  $(X^*, d^*)$  est un *complété* de  $(X, d)$ . On peut montrer que deux complétés  $(X^*, d^*)$  et  $(\tilde{X}, \tilde{d})$  quelconques de  $(X, d)$  sont isométriques. Ainsi le complété de  $(X, d)$  est unique si l'on considère deux espaces isométriques comme identiques.

3. Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace normé. On appelle *série* une suite  $\{s_n\}_{n \geq 1}$  du type  $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$  pour une certaine suite  $\{x_k\}_{k \geq 1} \subset E$ . On dit que  $s_n$  est la *nième somme partielle*. La série  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$  est dite *convergente* si la suite  $\{s_n\}$  converge. La série  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$  est dite *absolument convergente* si  $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$ .

Montrer que  $(E, \|\cdot\|)$  est un espace de Banach si et seulement si toute série dans  $E$  qui converge absolument est convergente.

4. A l'aide du théorème d'approximation de Weierstrass, montrer que  $(C[a, b], \|\cdot\|_{\infty})$  et  $(C[a, b], \langle \cdot, \cdot \rangle)$  sont séparables.

*Rappel.* Un espace métrique  $(M, d)$  est dit *séparable* s'il admet un sous-ensemble  $D$  à la fois dense ( $\overline{D} = M$ ) et dénombrable.

5. Soit  $A = \{\xi \in l^{\infty} : \xi_n \text{ vaut } 0 \text{ ou } 1 \text{ pour tout } n\}$ . Prouver que  $A$  n'est pas dénombrable et que  $\|\xi - \eta\|_{\infty} = 1$  pour  $\xi \neq \eta$  dans  $A$ . En déduire que  $l^{\infty}$  n'est pas séparable.

6. Prouver qu'un evn admettant une base de Schauder est (a) séparable et (b) de dimension infinie.