EPFL - automne 2025
ANALYSE FONCTIONNELLE I **Exercices**
Série 1 11 septembre 2025

Notation: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

1. Soit une limite de Banach $F : l^\infty_\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Par définition d'une limite de Banach, F est linéaire, $\liminf_{n\to\infty} x_n \le F(x) \le \limsup_{n\to\infty} x_n$ et $F(x) = F(Sx)$ pour tout $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^\infty_\mathbb{R}$, où $Sx = (x_2, x_3, \ldots)$.

   Montrer que, pour tout $x \in l^\infty_\mathbb{R}$, $F(x) \le \inf \limsup_{j\to\infty} \dfrac{1}{k} \displaystyle\sum_{i=1}^{k} x_{j+n_i}$, où l'infimum est pris sur $k \in \mathbb{N}$ et tous les choix d'entiers $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$.

   En déduire que $F(x) \ge \sup \liminf_{j\to\infty} \dfrac{1}{k} \displaystyle\sum_{i=1}^{k} x_{j+n_i}$

2. Soit un espace métrique (M, d).

   Un sous-ensemble $F \subset M$ est dit *fermé* si $M \backslash F$ est ouvert, et il est dit *séquentiellement fermé* si toute suite $(a_n) \subset F$ qui converge dans M a sa limite dans F.

   Prouver que F est séquentiellement fermé ssi il est fermé.

3. Soit un espace métrique (M, d) et un sous-ensemble non vide $A \subset M$. La restriction de d à $A \times A$, notée $d_A := d|_{A\times A}$, est une distance sur A. On dit que l'espace métrique (A, d_A) est un *sous-espace métrique* de (M, d).

   i) Si (A, d_A) est complet, prouver que A est fermé.

   ii) Si (M, d) est complet et A est fermé, prouver que (A, d_A) est complet.

4. Soit un espace métrique (X, d). Une application $f : X \to \mathbb{R}$ est dite *bornée* si $f(X)$ est un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$. On note par $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications bornées $f : X \to \mathbb{R}$ et on définit $\rho(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}$ pour $f, g \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$.

   (a) Montrer que $(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}), \rho)$ est un espace métrique.

   (b) Soit une suite de Cauchy $\{f_n\}_{n\ge1}$ dans $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ telle que
   $$\forall x \in X \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$
   Montrer ensuite que $\lim_{n\to\infty} \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in X\} = 0$. En déduire que f est bornée et que $f_n \to f$ dans $(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}), \rho)$.

   Indication: vous pouvez utiliser sans preuve la complétude de la droite euclidienne.

   (c) Soit $x_0 \in X$ fixé. Pour $a \in X$, on définit l'application $\phi_a : X \to \mathbb{R}$ par
   $$\phi_a(x) = d(x, a) - d(x, x_0).$$
   Montrer que $\phi_a \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ et que
   $$\forall a \in X \ \forall b \in X \quad \rho(\phi_a, \phi_b) = d(a, b).$$
   Indication: $|d(u, v) - d(u, w)| \le d(v, w)$ pour tous $u, v, w \in X$.