EPFL - automne 2025
ANALYSE FONCTIONNELLE I **Exercices**
Série 14 18 décembre 2025

1. Prouver que l'opérateur linéaire $T : X \to Y$ est fermé ssi $x_n \to x$ et $Tx_n \to y$ impliquent $y = Tx$.

2. Le Théorème de l'Inverse Borné implique le Théorème du Graphe Fermé (voir la preuve de ce dernier). Montrer que, réciproquement, le Théorème du Graphe Fermé implique le Théorème de l'Inverse Borné.

3. Soient des espaces de Banach X, Y, Z et des opérateurs linéaires $A \in \mathcal{L}(X, Z)$ et $B \in \mathcal{L}(Y, Z)$. On suppose que, pour tout $x \in X$, il existe un unique $y \in Y$ tel que $Ax = By$, que l'on note $y = Cx$. Montrer que ceci définit un opérateur linéaire $C \in \mathcal{L}(X, Y)$.

   Indication: Théorème du Graphe Fermé.

4. Soient deux normes $||\cdot||_1$ et $||\cdot||_2$ sur l'espace vectoriel $X \neq \{0\}$ telles que $(X, ||\cdot||_1)$ et $(X, ||\cdot||_2)$ sont des espaces de Banach. Nous supposons que $||x_n - y||_1 \to 0$ et $||x_n - z||_2 \to 0$ impliquent $y = z$. Montrer que l'application identité $T : (X, ||\cdot||_1) \to (X, ||\cdot||_2)$ est fermée et déduire que les deux normes sont équivalentes.

5. Le théorème VI.12 implique le théorème VI.20 (voir la preuve de ce dernier). Montrer que, réciproquement, le théorème VI.20 implique le théorème VI.12.

6. Soit deux evn X et Y sur $\mathbb{F}$, et un opérateur *linéaire* $T : X \to Y$. Si T est une application ouverte, prouver que $T : X \to Y$ est surjectif.

7. Soit des evn X et Y sur $\mathbb{F}$ avec $X \neq \{0\}$. Si $\mathcal{L}(X, Y)$ est complet, prouver que Y l'est aussi.