

1. A l'aide du théorème de Baire, prouver qu'un espace de Banach de dimension infinie n'admet pas de base algébrique dénombrable.
2. Soient des exposants conjugués $1 < p, q < \infty$. Si une suite $(\alpha_k) \subset \mathbb{F}$ est telle que, pour tout $(\xi_k) \in l^p$, $\sup_{n \in \mathbb{N}} |\sum_{k=1}^n \alpha_k \xi_k| < \infty$, prouver que $(\alpha_k) \in l^q$ en utilisant le principe de la borne uniforme.
3. Nous munissons $X = C([-1, 1], \mathbb{F})$ de la norme $\|f\|_2 = \left(\int_{-1}^1 |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$. Choisissons $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tel que $g \geq 0$ sur \mathbb{R} et $\int_{\mathbb{R}} g(t) dt = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $f \in X$, soit

$$\phi_n(f) = n \int_{-1}^1 g(nt) f(t) dt.$$

Prouver que

- (a) $\phi_n \in X^*$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\phi_n\|_{X^*} = \infty$;
- (b) pour tout $f \in X$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(f) = f(0)$.

En déduire que $(X, \|\cdot\|_2)$ n'est pas complet.

4. (a) Si X et Y sont deux evn sur \mathbb{F} , $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ et $x_n \xrightarrow{wk} x$ dans X , montrer que $Tx_n \xrightarrow{wk} Tx$ dans Y .
(b) Montrer que si X est un evn et $x_n \xrightarrow{wk} x$, alors $\{x_n\}$ est une suite bornée.
Indication: appliquer le principe de la borne uniforme à la suite $\{Jx_n\} \subset X^{**}$, où $J : X \rightarrow X^{**}$ est l'injection canonique.
(c) Soient deux evn X et Y sur \mathbb{F} , et un opérateur linéaire compact $T : X \rightarrow Y$.
Si $x_n \xrightarrow{wk} x$ dans X , prouver que $Tx_n \rightarrow Tx$ dans Y .