EPFL - automne 2025

ANALYSE FONCTIONNELLE I **Exercices**

Série 11 27 novembre 2025

1. Soient un evn $(X, ||\cdot||)$, un sous-espace vectoriel fermé $Y \subset X$ et $x_0 \in X$. Prouver que

   (a) si tous $f, g \in X^*$ tels que $f|_Y = g|_Y$ satisfont $f(x_0) = g(x_0)$, alors $x_0 \in Y$;

   (b) si tout $f \in X^*$ tel que $f|_Y = 0$ satisfait $f = 0$ sur X, alors $Y = X$.

   Indication: V.13.

2. Montrer que tout espace hilbertien est réflexif.

3. Montrer que, pour $1 < p < \infty$, l^p est réflexif.

   Indication: V.3.

4. Soit un evn X tel que X^* est séparable. Montrer que X est alors aussi séparable.

   Indication. Si $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ est un sous-ensemble dense de X^*, choisir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in X$ tel que $|f_n(x_n)| \geq \frac{1}{2}||f_n||$ et $||x_n|| \leq 1$. Montrer ensuite que $\operatorname{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ est un sous-ensemble dense de X en appliquant le Théorème V.13.

   Vérifier qu'il en découle que l^1 n'est pas réflexif.

5. Soit un espace de Banach B réflexif et tel que B^* est séparable. Sans utiliser le théorème d'extension de Hahn-Banach pour les fonctionnelles linéaires bornées, ni directement ni indirectement, montrer que toute suite bornée $\{x_n\}$ dans B admet une sous-suite qui converge faiblement.

   Remarque. La solution n'utilise essentiellement que le paragraphe V.23 du cours. Le résultat reste vrai sans l'hypothèse de séparabilité, mais alors la preuve s'appuie en plus sur le théorème d'extension de Hahn-Banach pour les fonctionnelles linéaires bornées. Voir le §V.24 du cours.