EPFL - automne 2025
ANALYSE FONCTIONNELLE I **Exercices**
Série 10 20 novembre 2025

1. Soit c_0, le sous-espace vectoriel de l^∞ consistant en toutes les suites qui convergent vers 0. Montrer que le dual de $(c_0, ||\cdot||_\infty)$ est congruent à l^1.

   Indication: s'inspirer de la preuve du §5.3.

2. **Théorème de la projection.** Soient un espace hilbertien $(H, <\cdot,\cdot>)$ et un sous-espace vectoriel fermé $M \subset H$. Fixons $x_0 \in H$, posons $d = \inf\{||x_0 - y|| : y \in M\}$ et considérons une suite $\{y_n\}_{n\geq 1} \subset M$ telle que $\lim_{n\to\infty} ||x_0 - y_n|| = d$.

   (a) Montrer que $\{y_n\}$ est une suite de Cauchy, qu'elle converge vers un certain $y_0 \in M$ et que $||x_0 - y_0|| = d$.
   Indication: $||(y_n - x_0) - (y_m - x_0)||^2 = 2||y_n - x_0||^2 + 2||y_m - x_0||^2 - ||(y_n - x_0) + (y_m - x_0)||^2$ et donc $||y_n - y_m||^2 = 2||y_n - x_0||^2 + 2||y_m - x_0||^2 - 4||x_0 - (y_n + y_m)/2||^2$

   (b) Vérifier que y_0 est uniquement déterminé.
   Indication: $||\tilde{y}_0 - y_0||^2 = 2||\tilde{y}_0 - x_0||^2 + 2||y_0 - x_0||^2 - 4||x_0 - (\tilde{y}_0 + y_0)/2||^2$

   (c) Montrer que $< v, x_0 - y_0 >= 0$ pour tout $v \in M$.
   Indication: si $||v|| = 1$, alors $| < v, x_0 - y_0 > |^2 = d^2 - ||x_0 - y_0 - < x_0 - y_0, v > v||^2$

3. **Théorème de représentation de Riesz.** Soient un espace hilbertien $(H, <\cdot,\cdot>)$ et $f \in H^*$. Montrer qu'il existe un unique $a \in H$ tel que $f(x) =< x, a >$ pour tout $x \in H$. Montrer aussi que $||a||_H = ||f||_{H^*}$.

   Indication. Si $f \neq 0$, choisir $x_0 \in H\backslash N(f)$ tel que $f(x_0) = 1$, et considérer

   $$a = ||x_0 - y_0||^{-2}(x_0 - y_0),$$

   où $y_0 \in N(f)$ est donné par l'exercice précédent appliqué à $M = N(f)$ et à x_0. Remarquer aussi que $x - f(x)(x_0 - y_0) \in N(f)$ pour tout $x \in H$.

4. Prouver que tout espace hilbertien réel est congruent à son dual (en tant qu'espaces vectoriels normés).

5. Soit la fonctionnelle sous-linéaire $p : l^\infty_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ définie par $p(x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k$. Donner explicitement une suite $x \in l^\infty_{\mathbb{R}}$ telle que

   $$p(x) + p(-x) \neq 0 = p(x + (-x)).$$

6. Soit une limite de Banach $F : l^\infty_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$. Donner une suite $x = (x_n) \in l^\infty_{\mathbb{R}}$ telle que, pour toute sous-suite convergente $(x_{n_k}) \in l^\infty_{\mathbb{R}}$, $F((x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}) \neq F(x)$. Justifiez votre réponse.