EPFL - automne 2025

ANALYSE FONCTIONNELLE I **Corrigé**

Série 9 13 novembre 2025

1. Par IV.10, il existe une suite orthonormée totale $\{f_n\}_{n\geq 1}$ de H faite de vecteurs propres de A et la suite $\{\mu_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ des valeurs propres correspondantes satisfait $\lim_{n\to\infty} \mu_n = 0$. De plus

$$Ax = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu_k < x, f_k > f_k$$

pour tout $x \in H$.

• On sait déjà que toute valeur propre de A est dans $\sigma(A)$, comme observé au paragraphe IV.13 du cours.

• Supposons ensuite que $\lambda \neq 0$ n'est pas une valeur propre de A, et donc $\lambda \neq \mu_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (puisque chaque μ_n est une valeur propre). Comme $\lim_{n\to\infty} \mu_n = 0 \neq \lambda$, on a $\inf_{n\in\mathbb{N}} |\mu_n - \lambda| > 0$. De plus, pour tous $x, y \in H$,

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} < x, f_k > f_k \ , \quad y = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} < y, f_k > f_k$$

(voir IV.9) et

$$\begin{aligned}
&Ax - \lambda x = y \\
&\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (\mu_k - \lambda) < x, f_k > f_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} < y, f_k > f_k \\
&\Leftrightarrow < x, f_k >= \frac{< y, f_k >}{\mu_k - \lambda} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Pour $y \in H$ donné, si $x \in H$ vérifie $Ax - \lambda x = y$, alors nécessairement $x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{< y, f_k >}{\mu_k - \lambda} f_k$.

D'autre part, pour $y \in H$, $\left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{< y, f_k >}{\mu_k - \lambda} f_k \right\}_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy. Ceci découle de

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{< y, f_k >}{\mu_k - \lambda} \right|^2 \leq \left\{ \inf_{j\in\mathbb{N}} |\mu_j - \lambda| \right\}^{-2} \sum_{k=1}^{\infty} | < y, f_k > |^2 \overset{Bessel}{\leq} \left\{ \inf_{j\in\mathbb{N}} |\mu_j - \lambda| \right\}^{-2} ||y||^2$$

En effet, plus généralement, si $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite orthonormée dans un espace préhilbertien et si $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{F}$ satisfait $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 < \infty$, alors $\{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Pour le voir, fixons $\epsilon > 0$ et choisissons $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k=N+1}^{\infty} |\alpha_k|^2 < \epsilon^2$. Pour tout $m > n \geq N$, on obtient

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} \alpha_k e_k - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} \alpha_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} |\alpha_k|^2 < \epsilon^2.$$

Dans notre cas, la suite en question converge dans l'espace de Hilbert H vers une certaine limite, notée $R_\lambda(y)$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a

$$< R_\lambda(y), f_j >= \left\langle \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{< y, f_k >}{\mu_k - \lambda} f_k, f_j \right\rangle = \frac{< y, f_j >}{\mu_j - \lambda}$$

et donc, pour tous $x, y \in H$,

$$(A-\lambda I)x = y \Leftrightarrow \Big(\forall k \in \mathbb{N} \ <x, f_k> = <R_\lambda(y), f_k>\Big) \Leftrightarrow x = R_\lambda(y).$$

Ainsi $A - \lambda I$ est bijectif d'application réciproque $R_\lambda : H \to H$, qui est linéaire. Nous obtenons aussi

$$||R_\lambda(y)||^2 \overset{Parseval}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{<y, f_k>}{\mu_k - \lambda} \right|^2 \leq \{\inf_{j\in\mathbb{N}} |\mu_j - \lambda|\}^{-2} ||y||^2,$$

prouvant que $R_\lambda \in \mathcal{L}(H)$. En conclusion, $(A-\lambda I)^{-1} = R_\lambda$ existe dans $\mathcal{L}(H)$ et donc $\lambda \in \rho(A)$.

• Finalement, $\mu_n \in \sigma(A)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} \mu_n = 0$ et donc $0 \in \sigma(A)$ car $\sigma(A)$ est fermé (cf §IV.14 du cours).

2. (a) Remarquons d'abord que $\sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n| < \infty$ et donc $\sup_{n\in\mathbb{N}} |f(\lambda_n)| < \infty$ puisque f est continue. Comme

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(\lambda_k)|^2 \, | <x, u_k> |^2 \leq \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} |f(\lambda_n)|\right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} | <x, u_k> |^2 < \infty,$$

la suite $\{\sum_{k=1}^n f(\lambda_k) <x, u_k> u_k\}_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy (même argument que ci-dessus) et converge donc dans l'espace complet H vers une certaine limite
$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n f(\lambda_k) <x, u_k> u_k$ notée plus simplement $\sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n) <x, u_n> u_n$
Clairement, $f(A)$ est un opérateur linéaire. Pour tout $x \in H$, nous avons grâce à l'égalité de Parseval

$$||f(A)x||^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} f(\lambda_n)^2 | <x, u_n> |^2 \leq (\sup_n |f(\lambda_n)|)^2 \sum_{n\in\mathbb{N}} | <x, u_n> |^2 = (\sup_n |f(\lambda_n)|)^2 ||x||^2$$

et donc $f(A) \in \mathcal{L}(H)$ avec $||f(A)|| \leq \sup_n |f(\lambda_n)|$.
En considérant $x = u_n$, on obtient $f(\lambda_n)^2 = ||f(A)u_n||^2 \leq ||f(A)||^2 \, ||u_n||^2 = ||f(A)||^2$ et donc $\sup_{n\in\mathbb{N}} |f(\lambda_n)| \leq ||f(A)||$. D'où $||f(A)|| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |f(\lambda_n)|$.
Finalement
$<f(A)x, y> = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \Big\langle f(\lambda_k) <x, u_k> u_k, y \Big\rangle$
$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n f(\lambda_k) <x, u_k><u_k, y> = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \Big\langle x, f(\lambda_k) <y, u_k> u_k \Big\rangle$
$= <x, f(A)y>$
pour tous $x, y \in H$, et donc $f(A)$ est symétrique.

(b) La suite orthonormée totale $\{u_n\}$ est aussi constituée de vecteurs propres de $f(A)$, les valeurs propres correspondantes étant $\{f(\lambda_n)\}$:

$$f(A)u_n = \sum_{k\in\mathbb{N}} f(\lambda_k) <u_n, u_k> u_k = f(\lambda_n) u_n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus observons que si $x \in H$ satisfait $f(A)x = \mu x$ avec $\mu \notin \{f(\lambda_n) : n \in \mathbb{N}\}$, alors $<x, u_n> = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (voir IV.4) et donc $x = 0$ (voir l'exercice 4 de la série 7). D'où μ n'est pas une valeur propre de $f(A)$.

(c) Rappel: la compacité de A assure que $\lambda_n \to 0$ (voir IV.10).
Comme $\lambda_n \to 0$, on a $f(\lambda_n) \to f(0)$. Puisque les valeurs propres de $f(A)$ sont exactement les $f(\lambda_n)$, si $f(A)$ est compact alors $f(\lambda_n) \to 0$. Donc $f(0) = 0$ si $f(A)$ est compact.
D'autre part, si $f(0) = 0$, alors $f(\lambda_n) \to 0$. Posons $B_n x = \sum_{k=1}^n f(\lambda_k) <x, u_k> u_k$, qui définit un opérateur linéaire et borné B_n. Comme $R(B_n)$ est de plus de dimension

finie, B_n est compact (cf le problème 5 de la série 4). Notons encore que $f(A) - B_n$ est un opérateur linéaire borné, $||f(A) - B_n|| = \sup_{k>n} |f(\lambda_k)|$ (en suivant le même argument qu'en (a)) et $\lim_{n\to\infty} ||f(A) - B_n|| = 0$ puisque $f(\lambda_n) \to 0$. Ceci montre que $f(A)$ est compact (cf III.13).

3. Par définition d'une limite de Banach, F est linéaire, $\liminf_{n\to\infty} x_n \leq F(x) \leq \limsup_{n\to\infty} x_n$ et $F(x) = F(Sx)$ pour tout $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^\infty_{\mathbb{R}}$, où $Sx = (x_2, x_3, \ldots)$.

   En raisonnant par contradiction, supposons qu'une suite $\alpha \in l^1_{\mathbb{R}}$ comme dans l'énoncé existe. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit $e_k = (\delta_{k,n})_{n\geq 1}$. Nous obtenons

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \alpha_k = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \delta_{k,n} = F(e_k) = \lim_{n\to\infty} \delta_{k,n} = 0$$

   car $F(\xi) = \lim_{n\to\infty} \xi_n$ si ξ converge. D'où $\alpha = 0$ et $F(\xi) = 0$ pour tout $\xi \in l^\infty_{\mathbb{R}}$. Contradiction.