

1. Comme $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite orthonormée totale, c'est une base de Schauder et $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, e_n \rangle e_n$ dans le sens que $x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$. Voir l'exercice 3 de la série 7. La continuité de T donne

$$\begin{aligned} Tx &= T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} T\left(\sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle Te_k \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle \lambda_k e_k \end{aligned}$$

Par conséquent, Tx admet le développement $\sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, e_n \rangle \lambda_n e_n$ dans la base de Schauder $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

2. Si $u = Kf$, alors $u(s) = \{1 - q(s)\} \int_0^s q(t)f(t)dt + q(s) \int_s^1 \{1 - q(t)\}f(t)dt$. Ceci donne $u(0) = u(1) = 0$ (car $q(0) = 0$ et $q(1) = 1$),

$$\begin{aligned} u'(s) &= -p^{-1}(s) \int_0^s q(t)f(t)dt + p^{-1}(s) \int_s^1 \{1 - q(t)\}f(t)dt + \{1 - q(s)\}q(s)f(s) \\ &\quad - q(s)\{1 - q(s)\}f(s), \\ p(s)u'(s) &= - \int_0^s q(t)f(t)dt + \int_s^1 \{1 - q(t)\}f(t)dt \\ \text{et } \{p(s)u'(s)\}' &= -q(s)f(s) - \{1 - q(s)\}f(s) = -f(s). \end{aligned}$$

Réciproquement, supposons que $-\{p(s)u'(s)\}' = f(s)$. Par ce qui précède, $v = Kf$ est une solution particulière de l'équation $-\{p(s)v'(s)\}' = f(s)$. D'autre part $v_1 = 1$ et $v_2 = q$ sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle linéaire $-\{p(s)v'(s)\}' = 0$. On en déduit l'existence de deux constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ telles que $u(s) = (Kf)(s) + c_1 + c_2q(s)$ pour tout $s \in [0, 1]$.

Si, de plus, $u(0) = u(1) = 0$, nous obtenons $0 = u(0) = 0 + c_1 + c_2 \cdot 0 = c_1$ et $0 = u(1) = 0 + 0 + c_2q(1) = c_2$ (car $c_1 = 0$). D'où $u = Kf$.

3. D'après le corrigé de l'exercice 4 de la série 2, qui s'appuie sur le théorème d'approximation de Weierstrass,

$$\{u \in C^2([0, 1], \mathbb{R}) : u \text{ est un polynôme à coefficients rationnels}\}$$

est dense dans $(C([0, 1], \mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ et donc $C^2([0, 1], \mathbb{R})$ l'est aussi. Il suffit donc de vérifier que $\{u \in C^2([0, 1], \mathbb{R}) : u(0) = u(1) = 0\}$ est dense dans $(C^2([0, 1], \mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Pour $u \in C^2([0, 1], \mathbb{R})$ fixé et pour $\epsilon > 0$ choisi arbitrairement, soit $\delta \in]0, 1/2[$ tel que

$$\int_0^\delta u^2(t)dt + \int_{1-\delta}^1 u^2(t)dt < \epsilon^2.$$

Soit aussi une fonction $\phi_\delta \in C^2([0, 1], [0, 1])$ telle que $\phi_\delta = 1$ sur $[\delta, 1 - \delta]$ et $\phi_\delta = 0$ à l'extérieur de $[\delta/2, 1 - \delta/2]$. Alors $u_\epsilon := \phi_\delta u \in C^2([0, 1], \mathbb{R})$ satisfait $u_\epsilon(0) = u_\epsilon(1) = 0$ et

$$\int_0^1 (u_\epsilon - u)^2 dt = \int_0^\delta (\phi_\delta - 1)^2 u^2 dt + \int_{1-\delta}^1 (\phi_\delta - 1)^2 u^2 dt \leq \int_0^\delta u^2(t)dt + \int_{1-\delta}^1 u^2(t)dt < \epsilon^2.$$

4. Soit $K : (C([0, 1], \mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (C([0, 1], \mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ comme au problème 2 ci-dessus. Clairement $k(s, t) = k(t, s)$ pour tous $s, t \in [0, 1]$. Par le problème 4 de la série 6, K est symétrique et, par III.15, K est compact. D'après le problème 2, $R(K) = \{u \in C^2([0, 1], \mathbb{R}) : u(0) = u(1) = 0\}$, qui est dense dans $(C([0, 1], \mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$, selon le problème 3.

Nous pouvons donc appliquer le Corollaire IV.8 et obtenir une suite orthonormée totale $\{e_n\}_{n \geq 1}$ de $(C([0, 1], \mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ faite de vecteurs propres de K . Soit la suite $\{\lambda_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ des valeurs propres correspondantes. Nous avons $\lambda_n \rightarrow 0$.

En posant $\mu_n = \lambda_n^{-1}$, nous obtenons par le problème 2

$$\begin{cases} e_n \in C^2([0, 1], \mathbb{R}), \\ -\{p(s)e'_n(s)\}' = \mu_n e_n(s) \text{ sur } [0, 1], \\ e_n(0) = e_n(1) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Clairement $|\mu_n| \rightarrow \infty$,

$$\mu_n = \mu_n \|e_n\|^2 = - \int_0^1 \{p(s)e'_n(s)\}' e_n(s) ds \stackrel{\text{par parties}}{=} \int_0^1 p(s)e'_n(s)e'_n(s) ds > 0$$

et donc $\mu_n \rightarrow \infty$.

Il reste à discuter le cas $p = 1$ sur $[0, 1]$. Dans ce cas, on peut explicitement résoudre (1). L'équation $-f''(s) = \mu f(s)$ sur $[0, 1]$ avec $\mu > 0$ a la solution générale $f(s) = A \cos(\sqrt{\mu} s) + B \sin(\sqrt{\mu} s)$. En tenant compte de $f(0) = f(1) = 0$, on obtient $A = 0$ et $\sqrt{\mu} = n\pi$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Nous pouvons donc poser $\mu_n = n^2\pi^2$ et $e_n(s) = \sqrt{2} \sin(n\pi s)$. Ceci donne une preuve du fait bien connu dans la théorie des séries de Fourier que $\{\sqrt{2} \sin(n\pi s)\}_{n \geq 1}$ est une suite orthonormée totale de $(C([0, 1], \mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

5. $(T - \lambda I)^{-1} - (T - \mu I)^{-1} = (\lambda - \mu)(T - \lambda I)^{-1}(T - \mu I)^{-1}$
 $\Leftrightarrow (T - \lambda I)^{-1}(T - \mu I) - I = (\lambda - \mu)(T - \lambda I)^{-1}$
 $\Leftrightarrow (T - \mu I) - (T - \lambda I) = (\lambda - \mu)I$
 $\Leftrightarrow \lambda - \mu = \lambda - \mu$
 $\Leftrightarrow \text{VRAI}$

6. Soit une suite orthonormée totale $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de H , dont l'existence est garantie par l'exercice 5 de la série 7. Pour tout $x \in H$, posons $Tx = (\langle x, e_1 \rangle, \langle x, e_2 \rangle, \langle x, e_3 \rangle, \dots)$, qui est une suite dans \mathbb{F} .

Observons que l'égalité de Parseval (valable car la suite orthonormée est totale, §IV.9)

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|x\|^2$$

assure que $Tx \in l^2$. De plus T est linéaire et l'égalité qui vient d'être donnée montre l'implication $Tx = 0 \Rightarrow x = 0$. Donc T est injectif.

Etant donné $\alpha \in l^2$, la suite $\{\sum_{k=1}^n \alpha_k e_k\}_{n \geq 1}$ est de Cauchy: fixons $\epsilon > 0$ et choisissons $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k=N+1}^{\infty} |\alpha_k|^2 < \epsilon^2$. Pour tout $m > n \geq N$, on obtient

$$\left\| \sum_{k=1}^m \alpha_k e_k - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \right\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^m \alpha_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=n+1}^m |\alpha_k|^2 < \epsilon^2.$$

Cette suite de Cauchy converge donc dans l'espace de Hilbert H vers un certain $x \in H$. Alors, pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\langle x, e_j \rangle = \left\langle \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k, e_j \right\rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_k \langle e_k, e_j \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_k \delta_{k,j} = \alpha_j.$$

Ainsi $Tx = \alpha$ et il en découle que T est surjectif.

Pour tous $x \in H$ et $\alpha \in l^2$, on a

$$\langle x, T^{-1}\alpha \rangle = \left\langle x, \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \right\rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle \overline{\alpha_k} = \langle Tx, \alpha \rangle.$$

D'où, pour tous $x, y \in H$,

$$\langle x, y \rangle = \langle x, T^{-1}Ty \rangle = \langle Tx, Ty \rangle.$$