

1. Si  $A = 0$ , le résultat est évident. Supposons donc que  $\|A\| > 0$ . D'abord, si  $Ax = \lambda x$  pour un certain  $x \neq 0$ , alors  $|\lambda| = \left\| A \frac{1}{\|x\|} x \right\| \leq \sup_{\|z\| \leq 1} \|Az\| = \|A\|$ .

D'autre part, par le paragraphe IV.6,  $\|A\|$  ou  $-\|A\|$  est une valeur propre de  $A$ . Ceci montre bien que  $\|A\| = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ est une valeur propre de } A\}$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\|A^n\| = \|A \circ \dots \circ A\| \leq \|A\|^n$  par le paragraphe III.6(c). Il reste à montrer que  $\|A^n\| \geq \|A\|^n$ . Soit  $x \in X \setminus \{0\}$  tel que  $Ax = \pm\|A\|x$  (cf IV.6). Alors

$$A^n x = A^{n-1}(Ax) = A^{n-1}(\pm\|A\|x) = \pm\|A\|A^{n-2}(Ax) = \pm\|A\|A^{n-2}(\pm\|A\|x) = (\pm\|A\|)^2 A^{n-2}x = \dots = (\pm\|A\|)^n x.$$

$$\text{D'où } \|A^n\| = \sup_{\|z\| \leq 1} \|A^n z\| \geq \left\| A^n \frac{1}{\|x\|} x \right\| = \|A\|^n.$$

2. On constate d'abord que

$$\langle T\xi, \eta \rangle = \sum_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \sum_{l \in \mathbb{N}} \lambda_{k,l} \xi_l \right\} \bar{\eta}_k = \sum_{l \in \mathbb{N}} \xi_l \overline{\left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_{l,k} \eta_k \right\}} = \langle \xi, T\eta \rangle,$$

et on se souvient ensuite que  $T$  est compact (voir l'exercice 3 de la série 6). Si  $T = 0$ ,  $T$  n'a aucune valeur propre non nulle. Si  $\|T\| > 0$ , on peut appliquer le théorème IV.7.

3. Supposons que, pour tout  $x \in X$ ,  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$ . Vérifions que, pour tout  $x$ , ce développement est unique: si  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j$  pour une certaine suite  $\{\alpha_j\}_{j \geq 1} \subset \mathbb{F}$ , alors

$$\langle x, e_k \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle e_j, e_k \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \alpha_j \delta_{j,k} = \alpha_k$$

et donc le développement est unique. Ainsi  $\{e_n\}_{n \geq 1}$  est bien une base de Schauder.

4. (a) Posons  $\alpha_k = \langle x, e_k \rangle$ . L'inégalité de Bessel donne  $\sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2 \leq \|x\|^2$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et donc  $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \leq \|x\|^2$ . Soit  $\epsilon > 0$  et choisissons  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\sum_{k=N+1}^{\infty} |\alpha_k|^2 < \epsilon^2$ . Pour tous  $m > n \geq N$ , on obtient alors

$$\left\| \sum_{k=1}^m \alpha_k e_k - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \right\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^m \alpha_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=n+1}^m |\alpha_k|^2 < \epsilon^2.$$

- (b) Supposons que  $\{e_n\}_{n \geq 1}$  est telle que, pour tout  $x \in X$ ,  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$ . Clairement si  $x \in X$  est tel que  $\langle x, e_k \rangle = 0$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , alors

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 0 \cdot e_k = 0.$$

Ceci prouve que  $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}^\perp := \{x \in X : \langle x, e_k \rangle = 0 \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}\} = \{0\}$ .

- (c) Supposons maintenant que  $X$  est un espace hilbertien et que  $\{e_n\}_{n \geq 1}$  est une suite orthonormée telle que  $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}^\perp = \{0\}$ . Pour  $x \in X$  fixé, la partie (a) affirme que la suite  $\{\sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k\}_{n \geq 1}$  est de Cauchy et donc converge vers un certain  $y \in X$ , puisque  $X$  est supposé hilbertien. Or, pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$\langle y - x, e_m \rangle = \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle \langle e_k, e_m \rangle \right\} - \langle x, e_m \rangle = \langle x, e_m \rangle - \langle x, e_m \rangle = 0.$$

D'où  $y - x \in \{e_m : m \in \mathbb{N}\}^\perp = \{0\}$  et  $x = y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$ .

5. Soit un ensemble  $D$  dénombrable et dense dans  $X$ . Enumérons les éléments de  $D$ :

$D = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Définissons inductivement la suite  $\{w_n\}_{n \geq 1}$ . Posons d'abord  $w_1 = 0$  si  $u_1 = 0$  et  $w_1 = \|u_1\|^{-1}u_1$  si  $u_1 \neq 0$ . Par induction, posons  $w_{n+1} = 0$  si  $u_{n+1} \in \text{span}\{w_1, \dots, w_n\}$  et

$$w_{n+1} = \left\| u_{n+1} - \sum_{k=1}^n \langle u_{n+1}, w_k \rangle w_k \right\|^{-1} \left( u_{n+1} - \sum_{k=1}^n \langle u_{n+1}, w_k \rangle w_k \right)$$

sinon. Ce procédé de Gram-Schmidt donne une suite  $\{w_n\}_{n \geq 1}$  telle que  $\text{span}\{w_1, \dots, w_n\} = \text{span}\{u_1, \dots, u_n\}$ ,  $\|w_n\| \in \{0, 1\}$  et  $\langle w_n, w_m \rangle = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $m < n$  (preuve par induction sur  $n$ ). De plus

$$\overline{\text{span}\{w_n : n \in \mathbb{N}\}} = \overline{\text{span}\{u_n : n \in \mathbb{N}\}} \supset \overline{\{u_n : n \in \mathbb{N}\}} = X.$$

La sous-suite  $\{w_{n_k}\}_{k \geq 1}$  de  $\{w_n\}_{n \geq 1}$  provenant par extraction de tous les éléments non nuls est donc une suite orthonormée totale.

6. On s'inspire du corrigé de l'exercice 5 de la série 2. Pour tous  $s_1 \neq s_2$  dans  $\mathbb{R}$ ,

$$\|e_{s_1} - e_{s_2}\|^2 = \sum_{t \in \{s_1, s_2\}} (e_{s_1}(t) - e_{s_2}(t))^2 = (e_{s_1}(s_1) - e_{s_2}(s_1))^2 + (e_{s_1}(s_2) - e_{s_2}(s_2))^2 = 2.$$

Soit un sous-ensemble  $D$  dense dans  $X$ . Alors, pour tout  $s \in \mathbb{R}$ ,  $D \cap B(e_s, 1/4) \neq \emptyset$  et on peut donc y choisir un certain  $d_s$ . Comme  $B(e_{s_1}, 1/4) \cap B(e_{s_2}, 1/4) = \emptyset$  pour tous  $s_1 \neq s_2$  dans  $\mathbb{R}$ , nous en déduisons que  $d_{s_1} \neq d_{s_2}$  et donc que  $D$  n'est pas dénombrable (car  $\mathbb{R}$  ne l'est pas).

*Remarque:*  $\{e_s : s \in \mathbb{R}\}$  est une base orthonormée de  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  (voir le §4.9 du cours), mais qui n'est pas dénombrable. Comme  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  n'est pas séparable, il n'admet pas de base de Schauder (cf l'exercice 6 de la série 2) et donc pas de suite orthonormée totale (cf l'exercice 3 de cette série).

7. (a) Définissons  $\xi_k$  par  $\xi_k = 0$  si  $\alpha_k = 0$  et  $\xi_k = \frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}$  si  $\alpha_k \neq 0$ . Clairement  $(\xi_k) \in l^\infty$  et  $\sum_{k=1}^n \alpha_k \xi_k = \sum_{k=1}^n |\alpha_k|$ . Comme par hypothèse la limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_k \xi_k$  existe dans  $\mathbb{F}$ , on obtient que  $(\alpha_k) \in l^1$ .

(b) Supposons par contradiction que  $(\alpha_k) \notin l^\infty$ . Il existe une sous-suite  $(\alpha_{k_j})$  telle que  $|\alpha_{k_j}| \geq j^2$  pour tout  $j \in \mathbb{N}$ . Soit  $\xi_{k_j} = \frac{|\alpha_{k_j}|}{j^2 \alpha_{k_j}}$  et  $\xi_k = 0$  si  $k$  n'est pas de la forme  $k = k_j$ . Comme  $\sum_{k=1}^\infty |\xi_k| = \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{j^2} < \infty$ , on en déduit que  $\xi \in l^1$ . D'autre part  $\sum_{k=1}^\infty \alpha_k \xi_k \geq \sum_{j=1}^\infty j^2 \frac{1}{j^2} = +\infty$ . Donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_k \xi_k$  n'existe pas dans  $\mathbb{F}$ . Contradiction avec l'hypothèse de la donnée.