

1. Pour tous  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in X$ , si  $x = T_\lambda^{n+1}z$  pour un certain  $z \in X$ , alors  $x = T_\lambda^n(T_\lambda z) \in R(T_\lambda^n)$ . Ceci montre que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $R(T_\lambda^{n+1}) \subset R(T_\lambda^n)$ . Le cas  $n = 0$  est évident.

Nous avons déjà vu (cf  $(\star)$  du §3.18 du cours) que, pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T_\lambda^n = T \circ S_n + (-\lambda)^n I$  pour un certain opérateur linéaire borné  $S_n$  et que  $T \circ S_n$  est compact. En appliquant le §3.20 du cours à l'opérateur compact  $T \circ S_n$ , on obtient que  $R(T \circ S_n + (-\lambda)^n I)$  est fermé.

2. Supposons que  $n \in \mathbb{N}_0$  et  $R(T_\lambda^n) = R(T_\lambda^{n+1})$ . Nous savons déjà (cf exercice 1) que  $R(T_\lambda^{n+1}) \supset R(T_\lambda^{n+2})$ . Soit d'autre part  $x \in R(T_\lambda^{n+1})$ . Alors  $x = T_\lambda^{n+1}z$  pour un certain  $z \in X$ ,  $T_\lambda^n z \in R(T_\lambda^n) = R(T_\lambda^{n+1})$  et il existe donc  $w \in X$  tel que  $T_\lambda^n z = T_\lambda^{n+1}w$ . D'où  $x = T_\lambda^{n+2}w \in R(T_\lambda^{n+2})$ . Ceci prouve que  $R(T_\lambda^{n+1}) \subset R(T_\lambda^{n+2})$ , et donc ces deux sous-espaces vectoriels sont égaux.

Par l'absurde, supposons que, pour tout  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $R(T_\lambda^{n+1})$  est un sous-espace vectoriel fermé (cf exercice 1) strictement inclus dans  $R(T_\lambda^n)$ . Par le lemme de Riesz, il existe  $x_n \in R(T_\lambda^n) \setminus R(T_\lambda^{n+1})$  tel que

$$\|x_n\| = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in R(T_\lambda^{n+1}) \quad \|x_n - x\| \geq \frac{1}{2}. \quad (\bullet)$$

Pour  $m > n \geq 0$ , on obtient

$$\begin{aligned} Tx_n - Tx_m &= (T_\lambda x_n + \lambda x_n) - (T_\lambda x_m + \lambda x_m) = \lambda \left( x_n + \lambda^{-1} T_\lambda x_n - \lambda^{-1} T_\lambda x_m - x_m \right) \\ &:= \lambda \left( x_n - z_n \right) \quad (\bullet\bullet) \end{aligned}$$

avec

$$z_n = -\lambda^{-1} T_\lambda x_n + \lambda^{-1} T_\lambda x_m + x_m \in R(T_\lambda^{n+1})$$

car  $T_\lambda x_n \in R(T_\lambda^{n+1})$  et  $x_m \in R(T_\lambda^m) \subset R(T_\lambda^{n+1})$ . Ainsi

$$\|Tx_n - Tx_m\| \stackrel{(\bullet\bullet)}{=} |\lambda| \|x_n - z_n\| \stackrel{(\bullet)}{\geq} \frac{|\lambda|}{2}$$

pour tous  $m > n \geq 0$  et la suite  $\{Tx_n\}$  n'a aucune sous-suite de Cauchy. D'autre part la suite  $\{x_n\}$  est bornée et donc, puisque  $T$  est compact, la suite  $\{Tx_n\}$  admet une sous-suite convergente, et nous avons ainsi obtenu une contradiction.

3. (a) Si une suite  $\xi = (\xi_n) \in l^1$  s'écrit sous la forme  $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_k h_k$  dans  $l^1$  pour une certaine suite  $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{F}$ , alors nécessairement que, pour  $n \geq 2$ ,

$$|\alpha_n| = \frac{1}{2} (|\alpha_n| + |\alpha_n|) = \frac{1}{2} \|-\alpha_n e_{n-1} + \alpha_n e_n\|_1 = \frac{1}{2} \|\alpha_n h_n\|_1 \rightarrow 0.$$

De plus

$$\begin{aligned} \xi &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_k h_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \alpha_1 e_1 + \sum_{k=2}^n \alpha_k (e_k - e_{k-1}) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k - \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{j+1} e_j \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n (\alpha_k - \alpha_{k+1}) e_k + \alpha_{n+1} e_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (\alpha_k - \alpha_{k+1}) e_k. \end{aligned}$$

Comme  $\{e_n\}_{n \geq 1}$  est une base de Schauder et  $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \xi_k e_k$  dans  $l^1$  (voir le corrigé de l'exercice 1 de la série 3), nécessairement aussi que  $\xi_n = \alpha_n - \alpha_{n+1}$  pour tout  $n \geq 1$  et donc  $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n - \alpha_{n+1}| < \infty$  (puisque  $\xi \in l^1$ ).

De plus, nécessairement que  $\sum_{k=1}^n \xi_k = \alpha_1 - \alpha_{n+1}$  et  $\alpha_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$  (la série converge absolument car  $\xi \in l^1$ ). Ainsi nécessairement

$$\alpha_{n+1} = \alpha_1 - \sum_{k=1}^n \xi_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} \xi_k \quad (n \geq 1).$$

(b) Nous venons de voir que la suite  $\{\alpha_n\}$  est unique si elle existe. Réciproquement, étant donné  $\xi = (\xi_n) \in l^1$ , on pose  $\alpha_n = \sum_{k=n}^{\infty} \xi_k$  pour tout  $n \geq 1$  et on a (mêmes calculs que ci-dessus)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_k h_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n (\alpha_k - \alpha_{k+1}) e_k + \alpha_{n+1} e_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (\alpha_k - \alpha_{k+1}) e_k$$

car  $\alpha_n = \sum_{k=n}^{\infty} \xi_k \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Comme  $\alpha_k - \alpha_{k+1} = \sum_{\ell=k}^{\infty} \xi_\ell - \sum_{\ell=k+1}^{\infty} \xi_\ell = \xi_k$ , la dernière limite existe bien dans  $l^1$  et vaut  $\xi$  (par le rappel ci-dessus de la série 3). Ceci prouve que  $\{h_n\}$  est une base de Schauder.

(c) En choisissant en particulier  $\xi = (\xi_n) = (n^{-1} - (n+1)^{-1}) \in l^1$ , on obtient  $\alpha_n = \sum_{k=n}^{\infty} \xi_k = 1/n$  pour tout  $n \geq 1$ . Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_{2k} h_{2k}$  convergerait dans  $l^1$ , on a vu dans la partie (a) que

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|0 - \alpha_{2k}| + |\alpha_{2k} - 0|) < \infty,$$

ce qui n'est pas vrai:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2|\alpha_{2k}| = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (2k)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} = \infty.$$

Voir par exemple le livre de I. Singer, *Bases in Banach spaces I*, Springer, 1970.