EPFL - automne 2025
ANALYSE FONCTIONNELLE I **Corrigé**
Série 3 25 septembre 2025

1. Pour $1 \leq p < \infty$ et $\xi \in l^p$,

$$\lim_{n\to\infty} ||\xi - \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j||_p = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} |\xi_j|^p \right)^{1/p} = 0. \quad (\star)$$

Supposons que $\xi \in l^p$ vérifie $\lim_{n\to\infty} ||\xi - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j||_p = 0$ et montrons que $\alpha_k = \xi_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On a

$$\lim_{n\to\infty} ||\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j - \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j||_p \leq \lim_{n\to\infty} ||\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j - \xi||_p + \lim_{n\to\infty} ||\xi - \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j||_p = 0$$

et, pour chaque $k \in \mathbb{N}$,

$$|\alpha_k - \xi_k| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j - \xi_j|^p \right)^{1/p} = ||\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j - \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j||_p$$

si $n \geq k$. En laissant n tendre vers ∞, on en déduit $\alpha_k - \xi_k = 0$. Ainsi le développement de $\xi \in l^p$ par rapport à $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est unique. Ceci montre que $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une base de Schauder.

Finalement, l^∞ n'a pas de base de Schauder car l^∞ n'est pas séparable (voir le Problème 5 de la série 2), alors qu'un evn avec une base de Schauder est séparable (d'après le Problème 6(a) de la série 2). Observez que $(\star)$ ci-dessus n'est pas vrai lorsque $p = \infty$ et $\xi \in l^\infty$ est donné par $\xi_j = 1$ pour tout $j \in \mathbb{N}$:

$$||\xi - \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j||_\infty = 1 \not\to 0$$

lorsque $n \to \infty$.

2. Soient deux normes $||\cdot||_1$ et $||\cdot||_2$ sur l'espace vectoriel complexe $\mathbb{C}^n$. Pour $u = (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$, posons $|||u|||_1 = ||(x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n)||_1$ et $|||u|||_2 = ||(x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n)||_2$. On vérifie facilement que $|||\cdot|||_1$ et $|||\cdot|||_2$ sont des normes sur l'espace vectoriel *réel* $\mathbb{R}^{2n}$. Par exemple, si $\alpha \in \mathbb{R}$, alors naturellement $\alpha \in \mathbb{C}$ et on a bien

$$|||\alpha u|||_j = ||\alpha(x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n)||_j = |\alpha| \, ||(x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n)||_j = |\alpha| \, |||u|||_j$$

pour $j \in \{1, 2\}$. En appliquant le résutat déjà connu pour l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^{2n}$, on sait que les normes $|||\cdot|||_1$ et $|||\cdot|||_2$ sont équivalentes et donc qu'il existe des constantes réelles $A, B > 0$ telles que

$$\forall u \in \mathbb{R}^{2n} \quad A|||u|||_1 \leq |||u|||_2 \leq B|||u|||_1$$

Il en résulte comme voulu que, pour tout $v = (x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n) \in \mathbb{C}^n$,

$$A|||u|||_1 = A||v||_1 \leq |||u|||_2 = ||v||_2 \leq B|||u|||_1 = B||v||_1$$

où $u = (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$.

3. Nous admettons comme connu le fait que l'espace euclidien/hermitien $(\mathbb{F}^n, <\cdot,\cdot>)$ est complet, et nous notons $||\cdot||_2$ la norme engendrée par $<\cdot,\cdot>$.

   Rappelons que $||\cdot||$ est la norme sur X. Si V est de dimension finie égale à n, considérons une base $\{e_1,\ldots,e_n\}$ de V et remarquons que $||(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)||_1 := ||\lambda_1 e_1+\ldots+\lambda_n e_n||$ est une norme sur $\mathbb{F}^n$ (facile!).

   Par l'exercice précédent, il existe ainsi $A, B > 0$ tels que

$$A||(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)||_2 \le ||(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)||_1 \le B||(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)||_2$$

   pour tout $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{F}^n$. Si $\{\lambda_{1,k}e_1+\ldots+\lambda_{n,k}e_n\}_{k\ge1}$ est une suite de Cauchy dans V, alors il en résulte successivement que $\{(\lambda_{1,k},\ldots,\lambda_{n,k})\}_{k\ge1}$ est une suite de Cauchy dans $(\mathbb{F}^n,||\cdot||_1)$, $\{(\lambda_{1,k},\ldots,\lambda_{n,k})\}_{k\ge1}$ est une suite de Cauchy dans $(\mathbb{F}^n,||\cdot||_2)$, $\{(\lambda_{1,k},\ldots,\lambda_{n,k})\}_{k\ge1}$ converge vers un certain $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ dans $(\mathbb{F}^n,||\cdot||_2)$, $\{(\lambda_{1,k},\ldots,\lambda_{n,k})\}_{k\ge1}$ converge vers $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ dans $(\mathbb{F}^n,||\cdot||_1)$ et $\{\lambda_{1,k}e_1+\ldots+\lambda_{n,k}e_n\}_{k\ge1}$ converge vers $\lambda_1e_1+\ldots+\lambda_ne_n$ dans $(V,||\cdot||)$. Ainsi $(V,||\cdot||)$ est complet et donc V est un sous-ensemble fermé de $(X,||\cdot||)$.

   V est isomorphe à $\mathbb{F}^n$ en tant qu'espace vectoriel sur $\mathbb{F}$ (un isomorphisme étant donné par $\lambda_1e_1+\ldots+\lambda_ne_n\to(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$) et donc toutes les normes sur V sont deux à deux équivalentes (voir l'exercice précédent).

4. $||Kf||_\infty = \max\limits_{a\le s\le b}\left|\int_a^b k(s,t)f(t)dt\right| \le \max\limits_{a\le s\le b}\int_a^b |k(s,t)|\,|f(t)|dt$
   $\le \max\limits_{a\le s\le b}\int_a^b |k(s,t)|\,||f||_\infty dt = \left\{\max\limits_{a\le s\le b}\int_a^b |k(s,t)|dt\right\}||f||_\infty$

   En posant $M := \max_{a\le s\le b}\int_a^b|k(s,t)|dt < \infty$, on obtient $||Kf||_\infty \le M||f||_\infty$ pour tout $f\in C[a,b]$, comme voulu.

5. Pour $x\in X$, soit $||x||_L := ||x||_X + ||Lx||_Y$. Clairement $||\cdot||_L$ est une norme sur X. D'après l'exercice 3, toutes les normes sur l'espace vectoriel de dimension finie X sont équivalentes. Il existe donc $C>0$ tel que $||x||_L\le C||x||_X$ pour tout $x\in X$. D'où, pour tout $x\in X$, $||Lx||_Y\le||x||_L\le C||x||_X$ et donc L est un opérateur linéaire borné.

6. Remarque préliminaire: la norme de $L\in\mathcal{L}(X,Y)$ (l'espace vectoriel des opérateurs linéaires bornés de X dans Y) satisfait

$$||L|| = \min\{M\in[0,\infty[:\ \forall x\in X\ \ ||Lx||_Y\le M||x||_X\}$$

   où X et Y sont des evn sur $\mathbb{F}$. Ceci découle du §3.6(a) du cours.

   Supposons que $T\in\mathcal{L}(X)$ est surjectif et $\inf_{||x||=1}||Tx||>0$. Alors T est injectif car, pour $x\ne y$,

$$Tx=Ty\Rightarrow T(x-y)=0\Rightarrow T\frac{x-y}{||x-y||}=0\Rightarrow \inf_{||z||=1}||Tz||=0,$$

   qui est en contradiction avec l'hypothèse.

   Ainsi la question est équivalente à montrer qu'étant donné un opérateur bijectif $T\in\mathcal{L}(X)$ (avec $X\ne\{0\}$), $T^{-1}\in\mathcal{L}(X)$ ssi $\inf_{||x||=1}||Tx||>0$.

   Supposons donc que $T\in\mathcal{L}(X)$ est une bijection, et soit son inverse T^{-1}, dont on ignore à ce stade s'il est borné. Pour tout $C\in]0,\infty[$, nous avons les équivalences suivantes:
   $||Tx||\ge C$ pour tout x tel que $||x||=1$ $\qquad(*)$
   $\Leftrightarrow ||Tx||\ge C||x||$ pour tout $x\in X$
   $\Leftrightarrow ||y||\ge C||T^{-1}y||$ pour tout $y\in X$
   $\Leftrightarrow ||T^{-1}y||\le C^{-1}$ pour tout $y\in X$ tel que $||y||\le 1$ $\qquad(**)$.

Si $T^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, en choisissant $C = ||T^{-1}||^{-1}$ dans $(**)$, nous obtenons de $(*)$ que

$$\inf_{||x||=1} ||Tx|| \geq ||T^{-1}||^{-1} > 0.$$

Réciproquement, si $\inf_{||x||=1} ||Tx|| > 0$, nous choisissons $C = \inf_{||x||=1} ||Tx|| > 0$ dans $(*)$ et alors $(**)$ donne $||T^{-1}y|| \leq \{\inf_{||x||=1} ||Tx||\}^{-1}$ pour tout $y \in X$ tel que $||y|| \leq 1$. Ainsi T^{-1} est borné et $||T^{-1}|| \leq \left\{\inf_{||x||=1} ||Tx||\right\}^{-1}$

Ceci prouve l'équivalence de l'énoncé. Supposons finalement que T^{-1} est borné. Nous venons d'obtenir les inégalités $\inf_{||x||=1} ||Tx|| \geq ||T^{-1}||^{-1}$ et $||T^{-1}|| \leq \left\{\inf_{||x||=1} ||Tx||\right\}^{-1}$. Elles conduisent immédiatement à $||T^{-1}|| = \left\{\inf_{||x||=1} ||Tx||\right\}^{-1}$