

1. Rappelons que F est fermé si, par définition, $M \setminus F$ est ouvert. Comme toute union d'ouverts est un ouvert, il en résulte que toute intersection de fermés est un fermé. Ainsi \overline{A} est fermé en tant qu'intersection de fermés.

Montrons les implications a) \Rightarrow b) \Rightarrow c) \Rightarrow a).

Supposons que $x \in \overline{A}$, soit $r > 0$ et vérifions que $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$. Par l'absurde, supposons que $B(x, r) \cap A = \emptyset$. Alors $M \setminus B(x, r)$ est un fermé contenant A , et donc $\overline{A} \subset M \setminus B(x, r)$. Ceci contredit $x \in \overline{A}$.

Supposons maintenant que $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ pour tout $r > 0$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, choisissons $a_n \in B(x, 1/n) \cap A$. La suite $(a_n) \subset A$ ainsi obtenue vérifie $d(a_n, x) < 1/n \rightarrow 0$ et donc $a_n \rightarrow x$.

Soit finalement une suite $(a_n) \subset A$ telle que $a_n \rightarrow x$. Considérons un fermé F contenant A . Comme F est séquentiellement fermé et $(a_n) \subset F$, on obtient $x \in F$ (voir l'exercice 2 de la série 1). Ainsi x appartient à tout fermé qui contient A , et donc $x \in \overline{A}$.

Les équivalences entre i), ii) et iii) résultent de ce qui précède. En effet A est dense exactement lorsque, pour tout $x \in M$, $x \in \overline{A}$.

2. Soit l'espace métrique complet $(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}), \rho)$ de l'exercice 4 de la série 1 et soit l'application $\Phi : X \rightarrow \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ donnée par $\Phi(a) = \phi_a$, où $\phi_a(x) = d(x, a) - d(x, x_0)$ avec $x_0 \in X$ fixé. Nous savons déjà que $\rho(\Phi(a), \Phi(b)) = d(a, b)$ pour tous $a, b \in X$.

Définissons $D := \Phi(X)$ et X^* comme l'adhérence dans $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ de l'ensemble D . Soit la distance d^* sur X^* donnée par $d^* = \rho_{X^*} = \rho|_{X^* \times X^*}$ (voir l'exercice 3 de la série 1). Soit encore $d_D^* = d^*|_{D \times D} = \rho|_{D \times D}$.

Comme X^* est fermé (en tant qu'adhérence de D) et comme $(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}), \rho)$ est un espace métrique complet, l'exercice 3 de la série 1 assure que le sous-espace métrique (X^*, d^*) est complet.

D'autre part D est dense dans X^* puisque X^* est l'adhérence de D dans $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$.

Clairement $\Phi : X \rightarrow D$ est bijective et vérifie $d_D^*(\Phi(a), \Phi(b)) = \rho(\Phi(a), \Phi(b)) = d(a, b)$ pour tous $a, b \in X$; ainsi (X, d) et (D, d_D^*) sont bien isométriques.

3. Supposons d'abord que E est un espace de Banach. Soit $\{x_n\}$ une suite d'éléments de E telle que $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$ et écrivons s_n pour la somme partielle $x_1 + \dots + x_n$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N > 0$ tel que $\sum_{r=n+1}^m \|x_r\| < \epsilon$ pour $m > n \geq N$. Ainsi, pour $m > n \geq N$,

$$\|s_m - s_n\| = \left\| \sum_{r=n+1}^m x_r \right\| \leq \sum_{r=n+1}^m \|x_r\| < \epsilon.$$

Par conséquent, $\{s_n\}$ est une suite de Cauchy dans l'espace complet E , donc $\{s_n\}$ converge, i.e. la série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ est convergente.

Réciproquement, soit $\{y_n\}$ une suite de Cauchy dans E . Il existe un entier $n(1) \geq 1$ tel que

$$\|y_m - y_n\| < 2^{-1} \text{ pour tous } m > n \geq n(1).$$

De même, il existe un entier $n(2) > n(1)$ tel que

$$\|y_m - y_n\| < 2^{-2} \text{ pour tous } m > n \geq n(2).$$

Par induction, on obtient une suite strictement croissante d'entiers positifs $\{n(1), n(2), \dots\}$ telle que, pour tout $k \geq 1$,

$$\|y_m - y_n\| < 2^{-k} \text{ pour tous } m > n \geq n(k).$$

En particulier, $\|y_{n(k+1)} - y_{n(k)}\| < 2^{-k}$ et ainsi $\|y_{n(1)}\| + \sum_{k=1}^{\infty} \|y_{n(k+1)} - y_{n(k)}\| < \infty$. Par hypothèse, la série $y_{n(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} (y_{n(k+1)} - y_{n(k)})$ converge vers un élément y de E et donc $y_{n(k)} \rightarrow y$. Finalement, pour $m \geq n(k)$, $\|y_m - y\| \leq \|y_m - y_{n(k)}\| + \|y_{n(k)} - y\| < 2^{-k} + \|y_{n(k)} - y\|$, montrant que

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \|y_m - y\| \leq 2^{-k} + \|y_{n(k)} - y\|$$

Comme l'entier $k \geq 1$ est arbitraire, $\limsup_{m \rightarrow \infty} \|y_m - y\| = 0$ et ainsi $\{y_m\}$ converge vers y . Donc E est complet.

4. Montrons que l'ensemble $D_{\mathbb{R}} \subset C([a, b], \mathbb{R})$ de tous les polynômes à coefficients rationnels est dense dans $(C([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\infty})$. Il s'agit de montrer que, pour tout $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ et tout $\epsilon > 0$, il existe un polynôme $\tilde{p} \in D_{\mathbb{R}}$ tel que $\|f - \tilde{p}\|_{\infty} < \epsilon$ (voir l'exercice 1). Par le théorème d'approximation de Weierstrass, pour tout $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ et tout $\epsilon > 0$, il existe un polynôme $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\|f - p\|_{\infty} < \epsilon/2$. De plus il existe un polynôme $\tilde{p} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ à coefficients rationnels tel que $\|p - \tilde{p}\|_{\infty} < \epsilon/2$. D'où $\|f - \tilde{p}\|_{\infty} < \epsilon$, comme voulu.

Comme $D_{\mathbb{R}}$ est dénombrable, $(C([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\infty})$ est ainsi séparable. De manière analogue, l'ensemble $D_{\mathbb{C}} \subset C([a, b], \mathbb{C})$ de tous les polynômes à coefficients dans $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ est dénombrable et dense dans $(C([a, b], \mathbb{C}), \|\cdot\|_{\infty})$, qui est donc séparable.

Maintenant choisissons un $f \in C([a, b], \mathbb{F})$ et $\epsilon > 0$ quelconques. Par ce qui précède, il existe $p \in D_{\mathbb{F}}$ tel que $\|f - p\|_{\infty} < \epsilon/\sqrt{b-a}$. D'où $\|f - p\|_2^2 = \int_a^b |f(t) - p(t)|^2 dt \leq \|f - p\|_{\infty}^2 (b-a) < \epsilon^2$. Ceci établit que $D_{\mathbb{F}}$ est dense dans $(C([a, b], \mathbb{F}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$, qui est donc séparable.

5. Par l'absurde, supposons que A est dénombrable et considérons une énumération de A : $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subset l^{\infty}$. Ecrivons $a_n = (a_{n,j})_{j \in \mathbb{N}} \in \mathbb{F}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et définissons $\xi \in l^{\infty}$ par $\xi_n = 1 - a_{n,n}$. Alors nous obtenons la contradiction $\xi \in A$ d'une part (puisque $\xi_n \in \{0, 1\}$) et $\xi \neq a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'autre part (puisque $\xi_n \neq a_{n,n}$).

Soit maintenant $\xi = (\xi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A$ et $\eta = (\eta_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A$ tels que $\xi \neq \eta$ et montrons que $\|\xi - \eta\|_{\infty} = 1$. Observons d'abord que $\|\xi - \eta\|_{\infty} \leq 1$ car $|\xi_n - \eta_n| \in \{0, 1\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Observons ensuite qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\xi_m \neq \eta_m$, et donc $|\xi_m - \eta_m| = 1$. D'où $\|\xi - \eta\|_{\infty} = 1$.

Soit un sous-ensemble S dense dans l^{∞} . Alors, pour tout $a \in A$, $S \cap B(a, 1/4) \neq \emptyset$ et on peut donc y choisir un certain s_a . Comme $B(\xi, 1/4) \cap B(\eta, 1/4) = \emptyset$ pour tous $\xi \neq \eta$ dans A , nous en déduisons que $s_{\xi} \neq s_{\eta}$ et donc que S n'est pas dénombrable.

6. Soit une base de Schauder $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de l'evn $(X, \|\cdot\|)$.
- (a) L'ensemble $\{\sum_{k=1}^n \alpha_k e_k : n \in \mathbb{N}, \alpha_k \in \mathbb{Q} \text{ pour } 1 \leq k \leq n\}$ est dense et dénombrable dans $(X, \|\cdot\|)$ si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Lorsque $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, l'ensemble

$$\left\{ \sum_{k=1}^n (\alpha_k + i\beta_k) e_k : n \in \mathbb{N}, \alpha_k \in \mathbb{Q}, \beta_k \in \mathbb{Q} \text{ pour } 1 \leq k \leq n \right\}$$

est dense et dénombrable dans $(X, \|\cdot\|)$.

- (b) Soit $\sum_{j=1}^m \alpha_j e_{n_j} = 0$ pour certains $m \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{F}$ et certains distincts n_1, \dots, n_m . Comme le vecteur nul a un développement unique par rapport à la base de Schauder, nous devons avoir $\alpha_j = 0$ pour tout $1 \leq j \leq m$. Ceci montre que $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est linéairement indépendant et donc X est de dimension infinie.