

1. Supposons d'abord que  $T$  est fermé. Par définition,  $G(T)$  est fermé dans  $(X \times Y, \|\cdot\|_{X \times Y})$ . Supposons encore que  $x_n \rightarrow x$  et  $Tx_n \rightarrow y$ . Alors  $(x_n, Tx_n) \in G(T)$  (pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ) et  $(x_n, Tx_n) \rightarrow (x, y)$  dans  $X \times Y$ . Comme  $G(T)$  est fermé,  $(x, y) \in G(T)$  et ainsi  $y = Tx$ .

Supposons ensuite que  $T$  n'est pas fermé, c'est-à-dire que  $G(T)$  n'est pas fermé dans  $X \times Y$ . Il existe donc une suite  $\{(x_n, y_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset G(T)$  telle que  $x_n \rightarrow x$ ,  $y_n \rightarrow y$  et  $(x, y) \notin G(T)$ . En conséquence,  $x_n \rightarrow x$ ,  $Tx_n = y_n \rightarrow y$  et  $y \neq Tx$ .

2. Supposons que le Théorème du Graphe Fermé est vrai et soient des espaces de Banach  $X$  et  $Y$ . Considérons un opérateur bijectif  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Comme  $T$  est continu,  $G(T)$  est fermé dans  $(X \times Y, \|\cdot\|_{X \times Y})$  (cette affirmation constitue la partie facile du Théorème du Graphe Fermé, partie dont la preuve donnée au cours ne repose pas sur le Théorème de l'Inverse Borné). Comme  $G(T^{-1}) = \{(y, x) : (x, y) \in G(T)\}$ , il est facile de vérifier que  $G(T^{-1})$  est alors aussi fermé dans  $(Y \times X, \|\cdot\|_{Y \times X})$ . Par le Théorème du Graphe Fermé,  $T^{-1} : Y \rightarrow X$  est borné.

3. Vérifions que  $C : X \rightarrow Y$  est linéaire. Soient  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$  et  $x_1, x_2 \in X$  quelconques, et posons  $y_1 = Cx_1$  et  $y_2 = Cx_2$ . On obtient

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 Ax_1 + \alpha_2 Ax_2 = \alpha_1 By_1 + \alpha_2 By_2 = B(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$$

et on en déduit  $C(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = \alpha_1 Cx_1 + \alpha_2 Cx_2$ .

Vérifions que  $C$  est fermé. Supposons que  $x_n \rightarrow x$  et  $Cx_n \rightarrow y$  et montrons que  $y = Cx$  (cf le problème 1). Posons  $y_n = Cx_n$ , de sorte que  $y_n \rightarrow y$ . Comme  $A$  et  $B$  sont continus,  $Ax_n \rightarrow Ax$  et  $By_n \rightarrow By$ . Or  $Ax_n = By_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  (car  $y_n = Cx_n$ ), et donc  $Ax = By$ . Ainsi  $y = Cx$ .

Comme  $X$  et  $Y$  sont des espaces de Banach, le Théorème du Graphe Fermé garantit que  $C$  est borné.

4. D'après le Problème 1,  $T$  est fermé et, par le Théorème du Graphe Fermé,  $T$  est borné. Clairement,  $T$  est bijectif et donc  $T^{-1}$  est borné, d'après le Théorème de l'Inverse Borné. Par conséquent, pour tout  $x \in X$ ,  $\|x\|_2 = \|Tx\|_2 \leq \|T\| \|x\|_1$  et  $\|x\|_1 = \|T^{-1}x\|_1 \leq \|T^{-1}\| \|x\|_2$ . D'où  $\|T^{-1}\|^{-1} \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|T\| \|x\|_1$  pour tout  $x \in X$ .

5. Supposons le théorème VI.20 vrai. Soient des espaces de Banach  $X$  et  $Y$ , et soit un opérateur surjectif  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Comme  $T$  est continu,  $G(T)$  est un sous-espace vectoriel fermé de  $(X \times Y, \|\cdot\|_{X \times Y})$  (c'est la partie facile du Théorème du Graphe Fermé). De plus  $X \times \{0\}$  est un sous-espace vectoriel fermé de  $X \times Y$ . La surjectivité de  $T$  implique que  $X \times Y = (X \times \{0\}) + G(T)$ . Comme  $X \times Y$  est un espace de Banach, le théorème VI.20 assure qu'il existe  $\beta > 0$  tel que chaque  $(x, y) \in X \times Y$  peut être représenté comme

$$\begin{aligned} (x, y) &= (x_1, 0) + (x_2, Tx_2), \quad x_1 \in X, \quad x_2 \in X, \\ \|(x_1, 0)\|_{X \times Y} &\leq \beta \|(x, y)\|_{X \times Y} \text{ et } \|(x_2, Tx_2)\|_{X \times Y} \leq \beta \|(x, y)\|_{X \times Y}. \end{aligned} \tag{1}$$

Choisissons  $y \in Y$  tel que  $\|y\|_Y < 1/\beta$ . Pour  $x = 0$ , soient  $x_1, x_2 \in X$  donnés par (1). Nous obtenons

$$0 = x = x_1 + x_2, \quad y = Tx_2, \quad \|x_2\|_X = \|x_1\|_X \leq \beta \|(x, y)\|_{X \times Y} = \beta \|y\|_Y < 1.$$

D'où  $y \in T(B_X(0, 1))$ , ce qui montre que  $B_Y(0, 1/\beta) \subset T(B_X(0, 1))$ .

6. Si  $Y = \{0\}$ , alors  $T$  est clairement surjectif. Supposons maintenant que  $Y \neq \{0\}$ . Comme la boule  $B_X(0, 1)$  dans  $X$  est un ouvert,  $T(B_X(0, 1))$  est un ouvert dans  $Y$  (l'application  $T$  étant ouverte par hypothèse). Comme  $0 = T0 \in T(B_X(0, 1))$ , il existe  $r > 0$  tel que  $B_Y(0, r) \subset T(B_X(0, 1))$ . Il en résulte que  $T$  est surjectif: si  $y \in Y \setminus \{0\}$ , alors  $r\|2y\|_Y^{-1}y \in B_Y(0, r)$  et donc il existe  $x \in B_X(0, 1)$  tel que  $r\|2y\|_Y^{-1}y = Tx$ . Ainsi  $y = T\left(\frac{2\|y\|_Y}{r}x\right) \in R(T)$ .

7. Soit des evn  $X$  et  $Y$  sur  $\mathbb{F}$  avec  $X \neq \{0\}$ . Choisissons  $x_0 \in X$  de norme 1. Par le §5.14 du cours, il existe  $F \in X^*$  telle que  $F(x_0) = \|F\|_{X^*} = 1$ . Pour  $y \in Y$ , soit l'opérateur linéaire  $L_y : X \rightarrow Y$  défini par  $L_y x = F(x)y$  (linéaire en  $x$ ). Il satisfait  $y = L_y x_0$  et il est borné car

$$\forall x \in X \quad \|L_y x\|_Y \leq \|F\|_{X^*} \|x\|_X \|y\|_Y = \|x\|_X \|y\|_Y$$

et de plus  $\|L_y\| \leq \|y\|_Y$ . Comme  $\|y\|_Y = \|L_y x_0\|_Y \leq \|L_y\| \|x_0\|_X = \|L_y\|$ , on a  $\|L_y\| = \|y\|_Y$ . Ainsi l'application linéaire  $y \rightarrow L_y \in \mathcal{L}(X, Y)$  préserve les normes et est donc injective. Il s'ensuit que  $Y$  est congruent avec le sous-espace vectoriel  $A = \{L_y : y \in Y\}$  de  $\mathcal{L}(X, Y)$ . Finalement  $A$  est fermé dans  $\mathcal{L}(X, Y)$ : si la suite  $\{y_n\} \subset Y$  est telle que  $L_{y_n} \rightarrow L \in \mathcal{L}(X, Y)$ , alors  $L = L_y \in A$  avec  $y = Lx_0$ . En effet, pour tout  $x \in X$ ,

$$Lx \stackrel{(*)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} (L_{y_n} x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (F(x)y_n) = F(x) \lim_{n \rightarrow \infty} (L_{y_n} x_0) \stackrel{(**)}{=} F(x)Lx_0 = F(x)y = L_y x.$$

L'égalité (\*) résulte de

$$\|L_{y_n} x - Lx\|_Y \leq \|L_{y_n} - L\| \|x\|_X,$$

qui tend vers 0 quand  $n \rightarrow \infty$ . L'argument pour (\*\*) est le même.

Conclusion: si  $\mathcal{L}(X, Y)$  est complet, alors  $A$  aussi (cf exercice 3 de la série 1) et donc  $Y$  aussi.