

1. Clairement ϕ_g est linéaire. Pour tout $f \in X$,

$$|\phi_g(f)| = \left| \int_a^b f(s)g(s)ds \right| \leq \|f\|_\infty \int_a^b |g(s)|ds$$

D'où $\phi_g \in X^*$ et $\|\phi_g\| \leq \int_a^b |g(s)|ds$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons

$$f_n(s) = \begin{cases} \overline{ng(s)} & \text{si } |g(s)| \leq 1/n, \\ \overline{g(s)}/|g(s)| & \text{si } |g(s)| \geq 1/n \end{cases}$$

Notons que $f_n \in X$, $\|f_n\|_\infty \leq 1$, $f_n(s)g(s) \in [0, \infty[$ pour tout $s \in [a, b]$,

$$f_n(s)g(s) \geq 0 \geq |g(s)| - \frac{1}{n} \text{ si } |g(s)| \leq 1/n,$$

$$f_n(s)g(s) = |g(s)| \geq |g(s)| - \frac{1}{n} \text{ si } |g(s)| \geq 1/n$$

$$\text{et } |\phi_g(f_n)| = \int_a^b f_n(s)g(s)ds \geq \int_a^b |g|ds - \frac{1}{n} \int_a^b ds.$$

Par conséquent

$$\|\phi_g\| \geq |\phi_g(f_n)| \geq \int_a^b |g|ds - \frac{1}{n}(b-a) \rightarrow \int_a^b |g(s)|ds$$

$$\text{et } \|\phi_g\| \geq \int_a^b |g|ds.$$

2. Posons $g_n(t) = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \cos mt \right\}$. En utilisant l'indication de l'énoncé, nous obtenons

$$g_n(t) = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t - \sin \frac{t}{2}}{2 \sin \frac{1}{2}t} \right\} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2}t}$$

pour tout $t \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$ (et $g_n(0) = \pi^{-1} (\frac{1}{2} + n)$).

Par l'exercice 1 de la présente série, $\phi_n \in X^*$ et

$$\begin{aligned} \|\phi_n\| &= \int_{-\pi}^{\pi} |g_n(t)|dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2}t} \right| dt \geq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{t} \right| dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{t} \right| dt \stackrel{(n + \frac{1}{2})t = s}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi(n + \frac{1}{2})} \left| \frac{\sin(s)}{s} \right| ds \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin s|}{k\pi} ds = \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \end{aligned}$$

D'où $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\phi_n\| = \infty$. Prouvons qu'il existe $f \in X$ telle que la suite $\{\phi_n(f)\}$ ne converge pas. Supposons le contraire: $\{\phi_n(f)\}$ converge et est donc une suite bornée pour tout $f \in X$. En appliquant le principe de la borne uniforme à l'espace de Banach $X = C([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ (voir VI.3, VI.4 et aussi VI.9), nous obtenons $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\phi_n\| < \infty$, ce qui est une contradiction.

Conclusion: la série de Fourier d'une fonction continue $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ ne converge pas nécessairement en $\tau = 0$ (!).

3. Remarquons d'abord que $g \circ T : X \rightarrow \mathbb{F}$ est bien linéaire et continue en tant que composée de deux applications linéaires et continues, et donc $T'g$ est bien dans X^* . De plus, pour tout $x \in X$,

$$|(T'g)(x)| = |g(Tx)| \leq \|g\|_{Y^*} \|Tx\|_Y \leq \|g\|_{Y^*} \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|x\|_X$$

et donc $\|T'g\|_{X^*} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|g\|_{Y^*}$ pour tout $g \in Y^*$. Puisque T' est clairement linéaire (en g), ceci montre que $T' \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ et que $\|T'\|_{\mathcal{L}(Y^*, X^*)} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$.

Réciproquement, choisissons x_0 quelconque dans X et montrons que

$$\|Tx_0\|_Y \leq \|T'\|_{\mathcal{L}(Y^*, X^*)} \|x_0\|_X$$

ce qui établira l'inégalité $\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \|T'\|_{\mathcal{L}(Y^*, X^*)}$ puisque x_0 est arbitraire. Si $Tx_0 = 0$, c'est évident et supposons donc que $Tx_0 \neq 0$. La Proposition V.14 donne $G \in Y^*$ telle que $\|G\|_{Y^*} = 1$ et $G(Tx_0) = \|Tx_0\|_Y$. D'où

$$\begin{aligned} \|Tx_0\|_Y &= G(Tx_0) = (T'G)(x_0) \leq \|T'G\|_{X^*} \|x_0\|_X \leq \|T'\|_{\mathcal{L}(Y^*, X^*)} \|G\|_{Y^*} \|x_0\|_X \\ &= \|T'\|_{\mathcal{L}(Y^*, X^*)} \|x_0\|_X \end{aligned}$$

4. Soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$ et $y_1, y_2 \in Y$. Alors, pour tout $x \in X$,

$$\begin{aligned} \langle x, T^*(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) \rangle_X &= \langle Tx, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \rangle_Y = \overline{\lambda_1} \langle Tx, y_1 \rangle_Y + \overline{\lambda_2} \langle Tx, y_2 \rangle_Y \\ &= \overline{\lambda_1} \langle x, T^* y_1 \rangle_X + \overline{\lambda_2} \langle x, T^* y_2 \rangle_X = \langle x, \lambda_1 T^* y_1 + \lambda_2 T^* y_2 \rangle_X, \\ \langle x, T^*(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) - \lambda_1 T^* y_1 - \lambda_2 T^* y_2 \rangle_X &= 0 \end{aligned}$$

et, en choisissant $x = T^*(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) - \lambda_1 T^* y_1 - \lambda_2 T^* y_2$, on obtient la linéarité de T^* : $T^*(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 T^* y_1 + \lambda_2 T^* y_2$. Si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, on peut omettre la conjugaison complexe.

Pour tout $y \in Y$, on a

$$\forall x \in X \quad |\langle x, T^* y \rangle_X| = |\langle Tx, y \rangle_Y| \leq \|T\| \|x\|_X \|y\|_Y.$$

En choisissant $x = T^* y$, on a donc $\|T^* y\|_X^2 \leq \|T\| \|T^* y\|_X \|y\|_Y$ et $\|T^* y\|_X \leq \|T\| \|y\|_Y$. D'où $T^* \in \mathcal{L}(Y, X)$ et $\|T^*\| \leq \|T\|$. Les normes de T et T^* sont ici simplement notées par $\|T\|$ et $\|T^*\|$.

De même, pour tout $x \in X$, on a

$$\forall y \in Y \quad |\langle Tx, y \rangle_Y| = |\langle x, T^* y \rangle_X| \leq \|x\|_X \|T^* y\|_X \leq \|x\|_X \|T^*\| \|y\|_Y.$$

En choisissant $y = Tx$, on a donc $\|Tx\|_Y^2 \leq \|x\|_X \|T^*\| \|Tx\|_Y$ et $\|Tx\|_Y \leq \|T^*\| \|x\|_X$. D'où $\|T\| \leq \|T^*\|$.

5. Notons par $m(A)$ la mesure de Lebesgue de l'ensemble mesurable A . Alors l'ouvert

$$U_n := \cup_{k \in \mathbb{N}}]q_k - 2^{-(k+n)}, q_k + 2^{-(k+n)}[$$

satisfait $m(U_n) \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{1-k-n} = 2^{1-n}$. Comme $E \subset U_n$, on a $m(E) \leq 2^{1-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $m(E) = 0$.

Clairement $\mathbb{Q} \subset U_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Q} \subset E$ et donc E est dense.

Si E était maigre, $\mathbb{R} \setminus E \supset \cap_{n \in \mathbb{N}} V_n$ pour une certaine famille $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ d'ouverts denses, et donc

$$\emptyset = E \cap (\mathbb{R} \setminus E) \supset (\cap_{n \in \mathbb{N}} U_n) \cap (\cap_{n \in \mathbb{N}} V_n).$$

Ainsi l'ensemble vide serait une intersection dénombrable d'ouverts denses, en contradiction avec le théorème de Baire appliqué à l'espace métrique complet \mathbb{R} (muni de la distance usuelle).