1. Soit un espace de Banach $(X, ||\cdot||)$ de dimension infinie. Supposons par contradiction que $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une base algébrique et soit le sous-espace vectoriel V_N engendré par $e_1, \ldots, e_N$, pour $N \in \mathbb{N}$. Comme V_N est de dimension finie, V_N est un sous-ensemble fermé de $(X, ||\cdot||)$ (voir l'exercice 3 de la série 3). De plus $X = \cup_{N\in\mathbb{N}} V_N$. Comme X n'est pas maigre (c'est une conséquence de la complétude de X et du théorème de Baire), il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que V_N contient une certaine boule $B(x_0, \epsilon)$ avec $x_0 \in X$ et $\epsilon > 0$. Comme $-x_0 \in V_N$, on en déduit que $B(0, \epsilon) \subset V_N$ et $X \subset V_N$, ce qui contredit le fait que X est supposé de dimension infinie.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, définissons $\phi_n : l^p \to \mathbb{F}$ par $\phi_n(\xi) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \xi_k$ pour tout $\xi \in l^p$. Par le théorème V.3, $\phi_n \in (l^p)^*$ et $||\phi_n||_{(l^p)^*} = \{\sum_{k=1}^n |\alpha_k|^q\}^{1/q}$. Par hypothèse, $\{\phi_n(\xi)\}_{n\geq 1}$ est bornée dans $\mathbb{F}$ pour tout $\xi \in l^p$. Nous pouvons faire appel au principe de la borne uniforme (VI.3 et VI.4, l^p étant complet) et en déduire que $\sup_{n\in\mathbb{N}} ||\phi_n||_{(l^p)^*} < \infty$. D'où
$$||\alpha||_q = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^q \right\}^{1/q} = \sup_{n\in\mathbb{N}} ||\phi_n||_{(l^p)^*} < \infty$$

3. (a) Clairement $\phi_n : X \to \mathbb{F}$ est linéaire. De plus, pour tout $f \in X$,
$$|\phi_n(f)| = \left| n \int_{-1}^1 g(nt) f(t) dt \right| \leq \int_{-1}^1 ng(nt)|f(t)| dt \leq \left\{ \int_{-1}^1 n^2 g^2(nt) dt \right\}^{1/2} ||f||_2$$
par l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $(C([-1,1], \mathbb{R}), <\cdot,\cdot>)$. Ainsi
$$\phi_n \in X^* \text{ et } ||\phi_n||_{X^*} \leq n \left\{ \int_{-1}^1 g^2(nt) dt \right\}^{1/2}.$$
En choisissant $f(t) = ng(nt)$ sur $[-1, 1]$, on obtient d'autre part
$$n^2 \int_{-1}^1 g^2(nt) dt = |\phi_n(f)| \leq ||\phi_n||_{X^*} \, ||f||_2 = ||\phi_n||_{X^*} \left\{ n^2 \int_{-1}^1 g^2(nt) dt \right\}^{1/2}$$
et donc
$$||\phi_n||_{X^*} \geq \left\{ n^2 \int_{-1}^1 g^2(nt) dt \right\}^{1/2} = \sqrt{n} \left\{ \int_{-n}^n g^2(s) ds \right\}^{1/2} \to \infty$$
lorsque $n \to \infty$.

(b) Choisissons f quelconque dans X. Alors
$$|\phi_n(f) - f(0)| = \left| n \int_{-1}^1 g(nt) f(t) dt - n \int_{\mathbb{R}} g(nt) f(0) dt \right|$$
car $n \int_{\mathbb{R}} g(nt) dt = \int_{\mathbb{R}} g(u) du = 1$ par hypothèse, et donc
$$|\phi_n(f) - f(0)| \leq \left| n \int_{-1/\sqrt{n}}^{1/\sqrt{n}} g(nt)\{f(t) - f(0)\} dt \right| + 2n||f||_\infty \int_{|t|\geq 1/\sqrt{n}} g(nt) dt$$
$$\leq \max_{|s|\leq 1/\sqrt{n}} |f(s) - f(0)| \left\{ n \int_{\mathbb{R}} g(nt) dt \right\} + 2||f||_\infty \int_{|u|\geq\sqrt{n}} g(u) du \to 0$$
lorsque $n \to \infty$, par la continuité de f et le fait que $\lim_{n\to\infty} \int_{|u|\geq\sqrt{n}} g(u) du = 0$. Ceci prouve que $\lim_{n\to\infty} \phi_n(f) = f(0)$.

Si $(X, ||\cdot||_2)$ était complet, le principe de la borne uniforme (cf VI.3, VI.4 et VI.9) et la seconde partie impliqueraient $\sup_n ||\phi_n||_{X^*} < \infty$, ce qui contredirait la première partie.

4. (a) Pour tout $g \in Y^*$, on a bien $g(Tx_n) = (g \circ T)(x_n) \to (g \circ T)(x) = g(Tx)$ car $g \circ T \in X^*$ et $x_n \overset{wk}{\to} x$.

   (b) Remarquons d'abord que $\{Jx_n\}$ converge faiblement* vers Jx, où $J : X \to X^{**}$ est l'injection canonique. En effet, pour tout $f \in X^*$, $(Jx_n)(f) = f(x_n) \to f(x) = (Jx)(f)$. Comme X^* est complet, le principe de la borne uniforme de Banach-Steinhaus (cf VI.3, VI.4 et aussi VI.9) assure que $\{Jx_n\}$ est bornée dans X^{**} et qu'ainsi $\{x_n\}$ est bornée dans X puisque J est une congruence entre X et $R(J)$.

   (c) Supposons T compact et $x_n \overset{wk}{\to} x$. Comme T est continu, $Tx_n \overset{wk}{\to} Tx$ dans Y (voir la première partie). Supposons par l'absurde que $\{Tx_n\}$ ne converge pas vers Tx dans Y. Alors $\lim_{k\to\infty} ||Tx_{n_k} - Tx||_Y > 0$ pour une certaine sous-suite $\{x_{n_k}\}$. Comme T est compact et $\{x_{n_k}\}$ est bornée dans X (voir la seconde partie), il existe une sous-suite $\{x_{n_{k_j}}\}$ telle que $\{Tx_{n_{k_j}}\}$ converge dans Y vers un certain $y \in Y$. Comme $Tx_n \overset{wk}{\to} Tx$ dans Y, on a aussi $Tx_{n_{k_j}} \overset{wk}{\to} Tx$ dans Y et donc $y = Tx$. Ainsi $\{Tx_{n_{k_j}}\}$ converge vers Tx dans Y, ce qui contredit $\lim_{j\to\infty} ||Tx_{n_{k_j}} - Tx||_Y > 0$.