1. Soit $\alpha \in l^1$ et définissons $T\alpha \in c_0^*$ par $(T\alpha)\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k$ pour tout $\xi \in c_0$. Clairement $T\alpha : c_0 \to \mathbb{F}$ est une fonctionnelle linéaire. Elle est bornée car $|(T\alpha)\xi| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k||\xi_k| \leq ||\alpha||_1||\xi||_\infty$ pour tout $\xi \in c_0$. Cette inégalité montre aussi que sa norme vérifie $||T\alpha||_{c_0^*} \leq ||\alpha||_1$. Clairement $T : l^1 \to c_0^*$ est linéaire. Vérifions l'injectivité de T. Si $\alpha \neq \widetilde{\alpha}$ dans l^1, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha_k \neq \widetilde{\alpha}_k$ et donc $(T\alpha)e_k \neq (T\widetilde{\alpha})e_k$ et ainsi $T\alpha \neq T\widetilde{\alpha}$, où $e_k = (\delta_{k,n})_{n\geq 1} \in c_0$.

   Réciproquement, soit $f \in c_0^*$ et définissons $\alpha = (\alpha_k) \subset \mathbb{F}$ par $\alpha_k = f(e_k)$. Montrons que $\alpha \in l^1$, $||\alpha||_1 \leq ||f||_{c_0^*}$ et $T\alpha = f$. Soit la suite $\xi^{(n)} \subset \mathbb{F}$ définie par

$$\xi_k^{(n)} = \begin{cases} 0 \text{ si } \alpha_k = 0 \text{ ou } k > n, \\ \frac{|\alpha_k|}{\alpha_k} \text{ si } \alpha_k \neq 0 \text{ et } k \leq n. \end{cases}$$

   Nous obtenons alors

$$\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| = \sum_{1\leq k\leq n,\ \alpha_k\neq 0} \frac{|\alpha_k|}{\alpha_k} f(e_k) = f(\xi^{(n)}) \leq ||f||_{c_0^*}||\xi^{(n)}||_\infty \leq ||f||_{c_0^*}$$

   En laissant $n \to \infty$, on en déduit que $\alpha \in l^1$ et $||\alpha||_1 \leq ||f||_{c_0^*}$.

   Observons que, pour tout $\xi \in c_0$ (c_0 est important),

$$\lim_{n\to\infty} ||\xi - \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k||_\infty = \lim_{n\to\infty} \sup_{k>n} |\xi_k| = 0$$

   et donc $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k = \xi$ dans l^∞. Comme $f : c_0 \to \mathbb{F}$ est continue, nous obtenons pour tout $\xi \in c_0$

$$f(\xi) = f(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \xi_k f(e_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \xi_k = (T\alpha)\xi.$$

   D'où $T\alpha = f$.

2. (a) L'identité "du parallélogramme"

$$||(y_n - x_0) + (y_m - x_0)||^2 + ||(y_n - x_0) - (y_m - x_0)||^2 = 2||y_n - x_0||^2 + 2||y_m - x_0||^2,$$

   se montre en utilisant le produit scalaire, en le développant et en simplifiant. On a donc

$$||y_n - y_m||^2 = 2||y_n - x_0||^2 + 2||y_m - x_0||^2 - 4||x_0 - (y_n + y_m)/2||^2 \leq 2||y_n - x_0||^2 + 2||y_m - x_0||^2 - 4d^2$$

   car $(y_n + y_m)/2 \in M$. On en déduit facilement que $\{y_n\}$ est une suite de Cauchy, qui converge donc vers un certain $y_0 \in M$ puisque H est complet et M est fermé. Par continuité de la norme, $||x_0 - y_0|| = d$.

   (b) Vérifions que y_0 est uniquement déterminé. Supposons que $\tilde{y}_0 \in M$ vérifie aussi $||x_0 - \tilde{y}_0|| = d$. Alors

$$||\tilde{y}_0 - y_0||^2 = 2||\tilde{y}_0 - x_0||^2 + 2||y_0 - x_0||^2 - 4||x_0 - (\tilde{y}_0 + y_0)/2||^2 \leq 2||\tilde{y}_0 - x_0||^2 + 2||y_0 - x_0||^2 - 4d^2 = 0$$

   et donc $\tilde{y}_0 = y_0$.

(c) Pour $v \in M$ tel que $||v|| = 1$, posons $s =< x_0 - y_0, v >$. On obtient

$$\begin{aligned} & d^2 - ||x_0 - y_0 - sv||^2 = d^2 - ||x_0 - y_0||^2 - ||sv||^2 + < x_0 - y_0, sv > + < sv, x_0 - y_0 > \\ = \; & d^2 - d^2 - |s|^2 ||v||^2 + \overline{s} < x_0 - y_0, v > + s < v, x_0 - y_0 >= | < x_0 - y_0, v > |^2 \end{aligned}$$

(si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, on peut omettre $\overline{}$).

Or $||x_0 - y_0 - sv|| \geq d$ car $y_0 + sv \in M$. D'où $0 \geq | < x_0 - y_0, v > |^2$ et $< x_0 - y_0, v >= 0$.

Plus généralement, si $||v|| > 0$, on applique ce qui précède au vecteur $||v||^{-1}v$: $< x_0 - y_0, ||v||^{-1}v >= 0$ et donc $< x_0 - y_0, v >= 0$. Si $v = 0$, le résultat est évident.

3. Nous utilisons $|| \cdot ||$ pour la norme dans H et $|| \cdot ||_{H^*}$ pour la norme dans H^*. Si $f = 0$, alors on peut choisir $a = 0$ et il n'y a pas d'autre choix possible. De plus $||a||_H = 0 = ||f||_{H^*}$.

   Supposons maintenant que $f \in H^* \backslash \{0\}$. Remarquons que $N(f)$ est fermé, car f est continue, et que $N(f) \neq H$ car $f \neq 0$. Choisissons $x_0 \in H \backslash N(f)$ tel que $f(x_0) = 1$ et appliquons l'exercice précédent à x_0 et à $M = N(f)$. Soit donc $y_0 \in N(f)$ donné par l'exercice précédent et posons
   $$a = ||x_0 - y_0||^{-2}(x_0 - y_0).$$
   L'exercice précédent nous assure que $< v, x_0 - y_0 >= 0$ pour tout $v \in N(f)$. D'autre part, pour tout $x \in H$, $x - f(x)(x_0 - y_0) \in N(f)$ et donc
   $$0 =< x - f(x)(x_0 - y_0), a >=< x, a > -f(x) < x_0 - y_0, a >=< x, a > -f(x).$$
   Ceci prouve que $f(x) =< x, a >$ pour tout $x \in H$.

   Unicité: si $\tilde{a}$ vérifie aussi $f(x) =< x, \tilde{a} >$ pour tout $x \in H$, alors
   $$||a - \tilde{a}||^2 =< a - \tilde{a}, a > - < a - \tilde{a}, \tilde{a} >= f(a - \tilde{a}) - f(a - \tilde{a}) = 0$$
   et donc $\tilde{a} = a$.

   On a encore $|f(x)| = | < x, a > | \leq ||x|| \, ||a||$ pour tout $x \in H$ et ainsi $||f||_{H^*} \leq ||a||$. Finalement $||a||^2 = f(a) \leq ||f||_{H^*} ||a||$ et donc $||a|| \leq ||f||_{H^*}$.

4. Le théorème de représentation de Riesz affirme qu'à tout $f \in H^*$ correspond exactement un vecteur $a \in H$ tel que $f(x) =< x, a >$ pour tout $x \in H$. De plus $||a||_H = ||f||_{H^*}$ D'autre part, pour tout $a \in H$, la fonctionnelle linéaire $x \to < x, a > \in \mathbb{R}$ est dans H^*. En conséquence, H et H^* sont congruents, une congruence étant donnée par $H \ni a \to < \cdot, a > \in H^*$.

   Remarque. Si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ et $H \neq \{0\}$, l'application $H \ni a \to < \cdot, a > \in H^*$ n'est pas linéaire.

5. Pour $n \geq 1$, posons
   $$x_n = \begin{cases} 1 & \text{si } 2^{p-1} \leq n < 2^p \text{ et } p-1 \text{ est un multiple de } 4, \\ 0 & \text{si } 2^{p-1} \leq n < 2^p \text{ et } p-2 \text{ est un multiple de } 4, \\ -1 & \text{si } 2^{p-1} \leq n < 2^p \text{ et } p-3 \text{ est un multiple de } 4, \\ 0 & \text{si } 2^{p-1} \leq n < 2^p \text{ et } p \text{ est un multiple de } 4, \end{cases}$$
   autrement dit,
   $$x = (\underbrace{1}_{p=1}, \underbrace{0, 0}_{p=2}, \underbrace{-1, -1, -1, -1}_{p=3}, \underbrace{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}_{p=4}, 1, 1, \ldots).$$

Si $p-1 \geq 0$ est un mutiple de 4, alors

$$\sum_{k=1}^{2^p-1} x_k = \sum_{k=1}^{2^{p-2}-1} x_k + \sum_{k=2^{p-2}}^{2^{p-1}-1} 0 + \sum_{k=2^{p-1}}^{2^p-1} 1 \geq -2^{p-2} + 0 + 2^{p-1} = \frac{1}{4}2^p$$

et $\displaystyle\frac{1}{2^p-1}\sum_{k=1}^{2^p-1} x_k \geq \frac{1}{4}$. Si $p-3 \geq 0$ est un mutiple de 4,

$$\sum_{k=1}^{2^p-1} x_k = \sum_{k=1}^{2^{p-2}-1} x_k + \sum_{k=2^{p-2}}^{2^{p-1}-1} 0 + \sum_{k=2^{p-1}}^{2^p-1} (-1) \leq 2^{p-2} + 0 - 2^{p-1} = -\frac{1}{4}2^p$$

et $\displaystyle\frac{1}{2^p-1}\sum_{k=1}^{2^p-1} x_k \leq -\frac{1}{4}$. D'où $p(x) \in [1/4, 1]$ et

$$p(-x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-x_k) = -\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \in [1/4, 1].$$

Ainsi $p(x) + p(-x) \geq \frac{1}{2} \neq 0 = p(x + (-x))$.

6. Soit $x \in l^\infty_{\mathbb{R}}$ donnée par $x_n = (-1)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Alors $y := Sx = (x_2, x_3, \ldots)$ est la suite définie par $y_n = (-1)^{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et donc $F(y) = F(Sx) = F(x)$. Comme $y = -x$, on a aussi $F(y) = -F(x)$ et ainsi $F(x) = 0$. Si (x_{n_k}) est une sous-suite convergente, alors nécessairement qu'elle est constante à partir d'un certain indice. Si cette constante est 1, alors $F((x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}) = \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = 1 \neq 0 = F(x)$ et, si cette constante est -1, alors $F((x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}) = \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = -1 \neq 0 = F(x)$.