Lemme de Riesz (§3.16) :
pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $z_{n+1} \in Z_{n+1}$ tel que $\|z_{n+1}\| = 1$ et $\forall y \in Z_n \ \|z_{n+1} - y\| \geq \frac{1}{2}$.
Ceci définit une suite $\{z_n\}_{n \geq 2}$.
Ainsi, pour tous $i > j \geq 1$,

$$\|z_i - z_j\| \geq \frac{1}{2}$$

et $\{z_n\}_{n \geq 2}$ n'a aucune sous-suite

3.18 Théorème : sur l'emboîtement des noyaux

Suite du §3.17. On a

$$\{0\} = N(T_\lambda^0) \subset N(T_\lambda) \subset N(T_\lambda^2) \subset \cdots \subset N(T_\lambda^n) \subset N(T_\lambda^{n+1}) \subset \cdots$$

et tous ces sous-espaces vectoriels sont fermés et ont des dimensions finies ($T_\lambda^0 = I$).

Preuve Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in N(T_\lambda^n)$. Alors $T_\lambda^n x = 0$ et donc

$$T_\lambda^{n+1} x = T(T_\lambda^n x) = 0.$$

λ

D'où $x \in N(T_\lambda^{n+1})$. Ainsi

$:= T \circ S_n + (-\lambda)^n I$ ☆

Comme T est compact et S_n est borné, $T \circ S_n$ est compact (cf séries d'exercices). Par le §3.17 appliqué à $T \circ S_n$ et $-(-\lambda)^n \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$,

$$N(T_\lambda^n) = N(T \circ S_n + (-\lambda)^n I)$$