Section de Mathématiques
Automne 2024

Analyse Fonctionnelle I

novembre 2024

Veuillez svp me communiquer d'éventuelles erreurs.

Enseignant : Boris Buffoni
D'après les notes du cours du printemps 2009 dactylographiées par
Aurélien Mauguin

Table des matières

Chapitre 0

Introduction : les limites de Banach

Durant ce cours, nous utiliserons les notations suivantes :

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$;
- $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;
- Pour désigner une suite nous utiliserons indifféremment les notations $(a_n)_{n\geq 0}$, $(a_n)_{n\geq 1}$, $\{a_n\}_{n\geq 0}$, $\{a_n\}_{n\geq 1}$, (a_n), $\{a_n\}$, etc.

Soit $l^\infty_{\mathbb{R}}$ l'**ensemble de toutes les suites bornées de nombres réels**, c'est-à-dire que $x = (x_n)_{n\geq 1} \in l^\infty_{\mathbb{R}}$ si $x_n \in \mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si $\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty$. Si nous munissons $l^\infty_{\mathbb{R}}$ des opérations suivantes, alors c'est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$:

- $(x_n)_{n\geq 1} + (y_n)_{n\geq 1} := (x_n + y_n)_{n\geq 1}$;
- $\alpha(x_n)_{n\geq 1} := (\alpha x_n)_{n\geq 1}$,

pour tout $x, y \in l^\infty_{\mathbb{R}}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, l'élément nul étant la suite identiquement nulle. Le sous-ensemble c des suites convergentes est un sous-espace vectoriel de $l^\infty_{\mathbb{R}}$, et l'application

$$x \mapsto \lim_{n\to\infty} x_n$$

pour tout $x \in c$ est linéaire, c'est-à-dire que

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \alpha x_n = \alpha \lim_{n\to\infty} x_n$$

pour tout $x, y \in c$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Nous pouvons alors étendre ce concept de limite à toute suite dans $l^\infty_{\mathbb{R}}$ grâce à la définition suivante ; une **limite de Banach** est une application $F : l^\infty_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ telle que :

(i) F est linéaire ;

(ii) $\liminf_{n\to\infty} x_n \leq F(x) \leq \limsup_{n\to\infty} x_n$, pour tout $x \in l^\infty_{\mathbb{R}}$;

(iii) $F(x) = F(Sx)$, pour tout $x = (x_1, x_2, ...) \in l^\infty_{\mathbb{R}}$, où $Sx = (x_2, x_3, ...)$.

Remarques :

- $\limsup_{n\to\infty}$ satisfait les conditions (ii) et (iii), mais n'est pas linéaire. En effet nous avons

  $$\limsup_{n\to\infty}(-1)^n + \limsup_{n\to\infty}(-1)^{n+1} = 2 \neq 0 = \limsup_{n\to\infty}\{(-1)^n + (-1)^{n+1}\}.$$

- La condition (ii) assure que $F(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$, pour tout $x \in c$.

- Nous prouverons plus tard l'existence d'une limite de Banach (non unique). Stefan Banach (1892-1945) est l'un des fondateurs de l'Analyse Fonctionnelle.

Une **fonctionnelle (linéaire)** est une application linéaire $f : X \to \mathbb{F}$ d'un espace vectoriel X sur $\mathbb{F}$ dans $\mathbb{F}$. Cette terminologie est surtout utilisée lorsque X est de dimension infinie.

Exemples : Les applications $x \mapsto \lim_{n\to\infty} x_n$, pour $x \in c$, et $x \mapsto F(x)$, pour $x \in l^\infty_{\mathbb{R}}$, sont des fonctionnelles sur c et $l^\infty_{\mathbb{R}}$.

Chapitre 1

Rappels et notions de base

1.1 Les espaces topologiques.

Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est un ensemble X muni d'une famille $\mathcal{T}$ de sous-ensembles de X, appelés les **ouverts** de X, telle que

(i) $\emptyset$ et X sont ouverts ;

(ii) toute union d'ouverts est un ouvert ;

(iii) toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.

$\mathcal{T}$ est appelé un **topologie** (sur X). On dit alors que $(X, \mathcal{T})$ est **séparé**, ou de **Hausdorff**, si pour tout $a, b \in X$ tels que $a \neq b$,

$$\exists A \in \mathcal{T},\ \exists B \in \mathcal{T} \text{ tels que } a \in A,\ b \in B \text{ et } A \cap B = \emptyset.$$

Soient deux espaces topologiques $(X, \mathcal{T})$ et $(X', \mathcal{T}')$. Une application $f : X \to X'$ est dite **continue** si, pour tout $U \in \mathcal{T}'$,

$$f^{-1}(U) = \{a \in X : f(a) \in U\} \in \mathcal{T}.$$

1.2 Les espaces métriques.

Un **espace métrique** (M,d) consiste en un ensemble $M \neq \emptyset$ muni d'une fonction $d : M \times M \to \mathbb{R}$ (la **métrique** ou **distance**) telle que

(i) $d(a, b) \geq 0$ avec égalité si et seulement si $a = b$;

(ii) $d(a, b) = d(b, a)$;

(iii) $d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$ **(inégalité du triangle)**,

pour tout $a, b, c \in M$. La topologie $\mathcal{T}_d$ associée à la métrique est définie par

$$A \in \mathcal{T}_d \text{ si } \forall a \in A, \exists r \in]0, \infty[\text{ tel que } B(a,r) \subset A,$$

où $B(a,r) = \{x \in M : d(x,a) < r\}$ est la boule de centre a et de rayon r. En fait, on vérifie que $B(a,r) \in \mathcal{T}_d$. L'espace topologique $(M, \mathcal{T}_d)$ est de Hausdorff : pour $a \neq b$ dans M, on a $B(a,\epsilon) \cap B(b,\epsilon) = \emptyset$ avec $\epsilon = \frac{1}{4}d(a,b)$. En effet, si $x \in B(a,\epsilon) \cap B(b,\epsilon)$, on obtiendrait la contradiction

$$0 < d(a,b) \leq d(a,x) + d(x,b) < \epsilon + \epsilon = \frac{1}{2}d(a,b).$$

Si $d(a_n, a) \to 0$, on dit que la suite $\{a_n\} \subset M$ **converge** vers $a \in M$, et on note $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ou $a_n \to a$.
Si (M,d) et (M',d') sont deux espaces métriques, f est continue de $(M, \mathcal{T}_d)$ dans $(M', \mathcal{T}_{d'})$ si et seulement si $f(a_n) \to f(a)$ chaque fois qu'une suite $\{a_n\} \subset M$ converge vers un certain $a \in M$.
La métrique produite sur $M \times M'$ est définie dans ce cours par

$$d_\pi((a,a'),(b,b')) = \sqrt{d(a,b)^2 + d'(a',b')^2}.$$

C'est bien une métrique. De plus $(a_n, a'_n) \to (a,a')$ dans $(M \times M', d_\pi)$ (cf définition ci-dessus) exactement lorsque $a_n \to a$ dans (M,d) et $a'_n \to a'$ dans (M', d').
On dit que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite de Cauchy** dans (M,d) si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall m, n \geq N,\ d(a_m, a_n) < \epsilon.$$

Toute suite convergente est de Cauchy. Si (M,d) a la propriété que toute suite de Cauchy est convergente, on dit que (M,d) est **complet**.

1.3 Proposition.

Soient un espace vectoriel V sur $\mathbb{F}$ et une métrique d sur V. Si

(i) $d(x+z, y+z) = d(x,y)$ (invariance par translations) ;

(ii) $d(\lambda x, 0) = |\lambda| d(x, 0)$,

pour tout $x, y, z \in V$ et $\lambda \in \mathbb{F}$, alors les applications

$$(x,y) \to x+y \quad \text{et} \quad (\lambda, x) \to \lambda x$$

sont continues sur $V \times V$ et $\mathbb{F} \times V$ munis des métriques produites ($\mathbb{F}$ étant muni de la distance usuelle).

Démonstration. Il nous faut donc montrer ici que l'addition et la multiplication par un scalaire sont deux fonctions continues. (V,d) étant un espace métrique, nous allons montrer ceci grâce à la notion de continuité séquentielle rappelée précédement. Si $x_n \to x$ et $y_n \to y$ dans (V,d), alors

$$\begin{aligned} 0 &\le d(x_n + y_n, x + y) \le d(x_n + y_n, x_n + y) + d(x_n + y, x + y) \\ &\overset{(i)}{=} d(y_n, y) + d(x_n, x) \to 0, \end{aligned}$$

et donc $x_n + y_n \to x + y$.
Si $x_n \to x$ dans (V,d) et $\lambda_n \to \lambda$ dans $\mathbb{F}$, alors

$$\begin{aligned} 0 &\le d(\lambda_n x_n, \lambda x) \le d(\lambda_n x_n, \lambda_n x) + d(\lambda_n x, \lambda x) \\ &\overset{(i)}{=} d(\lambda_n x_n - \lambda_n x, 0) + d(\lambda_n x - \lambda x, 0) \overset{(ii)}{=} |\lambda_n| d(x_n - x, 0) + |\lambda_n - \lambda| d(x, 0) \\ &\overset{(i)}{=} |\lambda_n| d(x_n, x) + |\lambda_n - \lambda| d(x, 0) \to 0, \end{aligned}$$

et donc $\lambda_n x_n \to \lambda x$. □

1.4 Les espaces vectoriels normés.

Un **espace vectoriel normé** (evn) $(X, \|.\|)$ est un espace vectoriel X sur $\mathbb{F}$ muni d'une norme $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ qui vérifie, par définition,

(i) $\|x\| \ge 0$ avec égalité si et seulement si $x = 0$;

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;

(iii) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire),

pour tout $x, y \in X$ et $\lambda \in \mathbb{F}$. Elle engendre la métrique $d(x,y) := \|x - y\|$, et la topologie $\mathcal{T}_d$ associée à cette métrique est notée $\mathcal{T}_{\|.\|}$.
La métrique ainsi engendrée vérifie (i) et (ii) du paragraphe 1.3. De plus $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ est continue.
Si (X,d) est complet, on dit que $(X, \|.\|)$ est un **espace de Banach**.

1.5 Remarque

Si une métrique d vérifie (i) et (ii) du paragraphe 1.3, alors $\|x\| := d(x, 0)$ définit une norme.

1.6 Les espaces préhilbertiens.

Un **espace préhilbertien** $(X, < ., . >)$ sur $\mathbb{F}$ est un espace vectoriel X sur $\mathbb{F}$, muni d'un produit scalaire $< ., . >: X \times X \to \mathbb{F}$ tel que, par définition,

(i) $< x, y >= \overline{< y, x >}$;

(ii) $< x, x > \geq 0$ avec égalité si et seulement si $x = 0$;

(iii) $< \alpha x + \beta y, z >= \alpha < x, z > + \beta < y, z >$,

pour tout $x, y, z \in X$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Lorsque $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, le conjugué complexe peut être omis dans (i).
En posant $\|x\| := \sqrt{< x, x >}$, on obtient une norme $\|.\|$, dite engendrée par le produit scalaire. Elle engendre à son tour la métrique $d(x, y) := \|x - y\|$ et la topologie $\mathcal{T}_d$, que l'on note aussi $\mathcal{T}_{<.,.>}$ ou encore $\mathcal{T}_{\|.\|}$.
L'**inégalité de Cauchy-Schwarz** suivante est alors valable :

$$| < x, y > | \leq \|x\|\|y\|,$$

pour tout $x, y \in X$. Si l'espace métrique engendré (X, d) est complet, on dit dans ce cas que $(X, < \cdot, \cdot >)$ est un espace **hilbertien** ou **de Hilbert**.

1.7 Base algébrique, dimension, base de Schauder.

Soient un espace vectoriel V et $A \subset V$.

(a) Le sous-ensemble A est dit **linéairement indépendant** si tout sous-ensemble fini de A est linéairement indépendant.

(b) L'**espace vectoriel engendré** par A, noté span A, est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires obtenues à partir de tout sous-ensemble fini de A.

(c) Un ensemble linéairement indépendant A tel que span $A = V$ est appelé une **base algébrique** de V (ou **base de Hamel**).

(d) V est de **dimension finie** si et seulement si V admet une base algébrique A de cardinalité finie. Sinon, V est dit de **dimension infinie**.

Remarque : Si V est de dimension finie, toutes les bases algébriques ont même cardinalité, appelée dimension de V et notée dim$V$.

(e) Soit $(X, \|.\|)$ un evn. Une suite $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ est dite **base de Schauder** si, pour tout $x \in X$, il existe une unique suite $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{F}$ telle que $\lim_{n\to\infty} \|x - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j\| = 0$. On note alors $x = \sum_{j\in\mathbb{N}} \alpha_j e_j$.

Chapitre 2

Exemples et quelques inégalités

2.1 Le théorème d'approximation de Weierstrass.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et soit $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors, pour toute fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{F}$ et pour tout $\epsilon > 0$, il existe un polynôme $p : [a, b] \to \mathbb{F}$ tel que $\max_{x \in [a,b]} |f(x) - p(x)| < \epsilon$.

Démonstration. Voir le cours d'Analyse Avancée IV. □

2.2 L'espace euclidien/hermitien $\mathbb{F}^n$ $(n \geq 1)$.

Pour $x = (x_1, ..., x_n)$ et $y = (y_1, ..., y_n)$ dans $\mathbb{F}^n$, soit

$$< x, y > := \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y}_j$$

(si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, on peut omettre le conjugué complexe). Alors $(\mathbb{F}^n, < .,. >)$ est un espace de Hilbert.

2.3 L'espace $(C([a, b], \mathbb{F}), \|.\|_\infty)$.

Pour $a < b$ dans $\mathbb{R}$, soit l'ensemble $C([a, b], \mathbb{F})$ des fonctions continues $f : [a, b] \to \mathbb{F}$ (on note aussi simplement $C[a, b]$). C'est un espace vectoriel sur $\mathbb{F}$ $(= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, avec

$$(f + g)(t) := f(t) + g(t) \quad \text{et} \quad (\alpha f)(t) := \alpha f(t),$$

pour tout $t \in [a, b]$, $f, g \in C[a, b]$ et $\alpha \in \mathbb{F}$
La norme du max est définie par

$$\|f\|_\infty := \sup_{a \leq t \leq b} |f(t)| = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|.$$

Au cours d'Analyse Avancée II, on a vu que $(C[a,b], \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach. De plus il est séparable, autrement dit il existe un ensemble dénombrable et dense $D \subset C[a,b]$ (cf série 2).

2.4 L'espace $(C([a,b],\mathbb{F}), < .,. >)$.

Cette fois, $C[a,b]$ (où $-\infty < a < b < \infty$) est muni du produit scalaire

$$< f, g >:= \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt.$$

De nouveau, lorsque $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, le conjugué complexe peut être omis. On laisse en exercice le fait de vérifier que c'est bien un produit scalaire.
La norme engendrée est souvent notée $\|.\|_2$. Muni de ce produit scalaire, $(C([a,b],\mathbb{F}), < .,. >)$ est séparable (cf série 2), mais pas complet. On notera aussi $(C[a,b], < .,. >)$.

2.5 L'espace $(l^\infty_\mathbb{F}, \|.\|_\infty)$.

On définit $l^\infty_\mathbb{F}$ comme l'ensemble des suites $\xi = (\xi_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{F}$ telles que $\sup_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n| < \infty$. Pour $\xi \in l^\infty_\mathbb{F}$, on pose

$$\|\xi\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n|.$$

Nous admettrons que $(l^\infty_\mathbb{F}, \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach. Il est de dimension infinie, mais pas séparable (cf série 2). On notera également $(l^\infty, \|.\|_\infty)$.

2.6 Les espaces $(l^p_\mathbb{F}, \|.\|_p)$, $p \in [1,\infty[$.

Pour $1 \leq p < \infty$, $l^p_\mathbb{F}$ est l'ensemble des suites $\xi = (\xi_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{F}$ telles que $\sum_{n=1}^\infty |\xi_n|^p < \infty$. Pour $\xi \in l^p_\mathbb{F}$, on pose

$$\|\xi\|_p := \left(\sum_{n=1}^\infty |\xi_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Nous admettrons que $(l^p_\mathbb{F}, \|.\|_p)$ est un espace de Banach. On note aussi $(l^p, \|.\|_p)$.

2.7 Exposants conjugués.

On dit que $p, q \in [1,\infty]$ sont des **exposants conjugués** si

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

On utilise ici la convention que $1/\infty = 0$. Observons que si $1 < p, q < \infty$, on a alors $pq = p + q$, $(p-1)q = p$ et $(p-1)(q-1) = 1$. On note $p' := q$ et $q' := p$.

2.8 Inégalité de Young.

Pour tout $x, y \geq 0$ et $1 < p < \infty$, nous savons par le cours d'Analyse IV que

$$x^{1/p}y^{1/p'} \leq \frac{1}{p}x + \frac{1}{p'}y.$$

En posant alors $x = a^p$ et $y = b^{p'}$ avec $a, b \geq 0$, on obtient l'**inégalité de Young**

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}.$$

2.9 Les espaces $L^p_{\mathbb{R}}(a, b)$ (cf Analyse IV).

Soient $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Pour $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ mesurable, on pose

$$\|f\|_{L^p_{\mathbb{R}}} := \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \in [0, \infty]$$

si $p \in [1, \infty[$, et

$$\|f\|_{L^\infty_{\mathbb{R}}} := \text{supess}\{|f|\} = \inf\{\alpha \in [0, \infty] : |f(x)| \leq \alpha \text{ p.p. } \} \in [0, \infty].$$

On note

$$L^p_{\mathbb{R}}(a, b) := \{f :]a, b[\to \mathbb{R} \text{ mesurable telle que } \|f\|_{L^p_{\mathbb{R}}} < \infty\}$$

pour $p \in [1, \infty]$. On pose également la convention que deux fonctions égales presque partout sont identifiées.
Alors $(L^p_{\mathbb{R}}(a, b), \|.\|_{L^p_{\mathbb{R}}})$ est un espace de Banach sur $\mathbb{R}$ (voir le cours d'Analyse IV). On notera aussi $L^p(a, b)$, $\|.\|_{L^p}$, $\|.\|_p$.

2.10 Inégalités de Hölder et de Minkowski dans $L^p_{\mathbb{R}}(a, b)$ (cf Analyse IV).

Hölder : Si $f \in L^p_{\mathbb{R}}(a, b)$ et $g \in L^{p'}_{\mathbb{R}}(a, b)$ avec $p \in [1, \infty]$, alors $fg \in L^1_{\mathbb{R}}(a, b)$ et

$$\|fg\|_{L^1_{\mathbb{R}}} \leq \|f\|_{L^p_{\mathbb{R}}} \|g\|_{L^{p'}_{\mathbb{R}}}.$$

Minkowski : Si $f, g \in L^p_{\mathbb{R}}(a, b)$ avec $p \in [1, \infty]$, alors $f + g \in L^p_{\mathbb{R}}(a, b)$ et

$$\|f + g\|_{L^p_{\mathbb{R}}} \leq \|f\|_{L^p_{\mathbb{R}}} + \|g\|_{L^p_{\mathbb{R}}}.$$

L'inégalité de Minkowski s'interprète comme étant l'inégalité du triangle dans $L^p_{\mathbb{R}}(a, b)$.

2.11 Les espaces $L^p_{\mathbb{C}}(a,b)$.

Soient $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Une fonction $f :]a,b[\to \mathbb{C}$ est mesurable si, par définition, $f = f_1 + if_2$ avec $f_1, f_2 :]a,b[\to \mathbb{R}$ mesurables. Dans ce cas, $|f| :]a,b[\to \mathbb{R}$ est aussi mesurable. Pour $p \in [1,\infty]$, on pose alors

$$\|f\|_{L^p_{\mathbb{C}}} := \| \, |f| \, \|_{L^p_{\mathbb{R}}} \in [0,\infty],$$

et

$$L^p_{\mathbb{C}}(a,b) := \{f :]a,b[\to \mathbb{C} \text{ mesurable telle que } \|f\|_{L^p_{\mathbb{C}}} < \infty\}.$$

On pose également la convention que deux fonctions égales presque partout sont identifiées.
En particulier, on a $f \in L^1_{\mathbb{C}}(a,b)$ ssi $f_1, f_2 \in L^1_{\mathbb{R}}(a,b)$, auquel cas on définit

$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^b f_1(x)dx + i \int_a^b f_2(x)dx.$$

Pour $f \in L^p_{\mathbb{C}}(a,b)$ et $g \in L^{p'}_{\mathbb{C}}(a,b)$, on obtient que $fg \in L^1_{\mathbb{C}}(a,b)$ et

$$\|fg\|_{L^1_{\mathbb{C}}} = \| \, |f|\,|g| \, \|_{L^1_{\mathbb{R}}} \overset{\S 2.10}{\leq} \| \, |f| \, \|_{L^p_{\mathbb{R}}} \, \| \, |g| \, \|_{L^{p'}_{\mathbb{R}}} = \|f\|_{L^p_{\mathbb{C}}} \|g\|_{L^{p'}_{\mathbb{C}}},$$

et donc l'inégalité de Hölder reste valable. Il en va de même pour l'inégalité de Minkowski. Il en résulte alors que $(L^p_{\mathbb{C}}(a,b), \|.\|_{L^p_{\mathbb{C}}})$ est un evn sur $\mathbb{C}$ et c'est même un espace de Banach (comme lorsque $\mathbb{F} = \mathbb{R}$). On notera aussi $L^p(a,b)$, $\|.\|_{L^p}$, $\|.\|_p$, comme dans le cas réel.

2.12 Propriétés des espaces l^p.

Pour $p \in [1,\infty]$, $(l^p_{\mathbb{F}}, \|.\|_p)$ est un espace de Banach. De plus on a également

Hölder : Si $\xi \in l^p_{\mathbb{F}}$ et $\eta \in l^{p'}_{\mathbb{F}}$, alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n \eta_n| \leq \|\xi\|_p \|\eta\|_{p'}.$$

Minkowski : Si $\xi \in l^p_{\mathbb{F}}$ et $\eta \in l^p_{\mathbb{F}}$, alors $\xi + \eta \in l^p_{\mathbb{F}}$ et

$$\|\xi + \eta\|_p \leq \|\xi\|_p + \|\eta\|_p$$

2.13 L'espace de Hilbert l^2.

Dans l^2, considérons $< .,. >: l^2 \times l^2 \to \mathbb{F}$ défini par

$$< \xi, \eta > := \sum_{j \in \mathbb{N}} \xi_j \overline{\eta}_j$$

(lorsque $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, le conjugué complexe peut être omis). L'inégalité de Hölder pour $p = 2$ donne

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} |\xi_j \overline{\eta}_j| = \sum_{j \in \mathbb{N}} |\xi_j|\,|\eta_j| \leq \|\xi\|_2 \|\eta\|_2 < \infty,$$

et donc $< \xi, \eta >= \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} \xi_j \overline{\eta}_j$ existe dans $\mathbb{F}$ (cf série 2, exo 3).
On vérifie facilement que $< .,. >$ est un produit scalaire. Comme

$$< \xi, \xi >= \sum_{j \in \mathbb{N}} |\xi_j|^2 = \|\xi\|_2^2$$

pour tout $\xi \in l^2$, $< .,. >$ engendre la norme $\|.\|_2$ du paragraphe 2.6. Comme $(l^2, \|.\|_2)$ est complet, $(l^2, < .,. >)$ est un espace de Hilbert.

2.14 L'espace de Hilbert $L^2(a, b)$.

Dans $L^2(a, b)$, la norme $\|.\|_{L^2}$ est engendrée par le produit scalaire $< .,. >: L^2(a, b) \times L^2(a, b) \to \mathbb{F}$ suivant :

$$< f, g >:= \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx,$$

où le conjugué complexe peut être omis si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. L'inégalité de Hölder donne

$$\int_a^b |f\overline{g}|dx = \int_a^b |f|\,|g|dx \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2} < \infty,$$

et donc $< f, g >\in \mathbb{F}$ est bien défini.
Comme $(L^2(a, b), \|.\|_{L^2})$ est complet, $(L^2(a, b), < .,. >)$ est un espace de Hilbert. C'est le complété de $(C[a, b], < .,. >)$ (cf paragraphe 2.4) lorsque $-\infty < a < b < +\infty$.

2.15 Résumé.

Notations	Complet ?	Séparable ?	Inégalités (en plus de la triangulaire)
$(\mathbb{F}^n, <.,.>)$, $\mathbb{F}^n$	Oui	Oui	Cauchy-Schwarz, Young
$(C([a,b],\mathbb{F}), \|\|.\|\|_\infty)$, $(C[a,b], \|\|.\|\|_\infty)$, $C[a,b]$, $-\infty < a < b < +\infty$	Oui	Oui	
$(C([a,b],\mathbb{F}), <.,.>)$, $(C[a,b], <.,.>)$, $C[a,b]$, $-\infty < a < b < +\infty$	Non	Oui	Cauchy-Schwarz
$(l^\infty_{\mathbb{F}}, \\|.\\|_\infty)$, $(l^\infty, \\|.\\|_\infty)$, l^∞	Oui	Non	Minkowski (=triangulaire) Hölder (en relation avec $l^1_{\mathbb{F}}$)
$\big(l^p_{\mathbb{F}}, \\|.\\|_p\big)$, $(l^p, \\|.\\|_p)$, l^p, $p \in [1, \infty[$	Oui	Oui	Hölder, Minkowski
$L^p_{\mathbb{R}}(a,b)$, $L^p(a,b)$, $\\|.\\|_{L^p}$, $\\|.\\|_p$, $p \in [1,\infty]$	Oui		Hölder, Minkowski
$L^p_{\mathbb{C}}(a,b)$, $L^p(a,b)$, $\\|.\\|_{L^p}$, $\\|.\\|_p$, $p \in [1,\infty]$	Oui		Hölder, Minkowski
l^2	Oui	Oui	Cauchy-Schwarz, Minkowski
$L^2(a,b)$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$	Oui	Oui	Cauchy-Schwarz, Minkowski

Chapitre 3

Opérateurs linéaires

3.1 Opérateurs linéaires et bornés.

Soient des evn $(X, \|.\|_X)$ et $(Y, \|.\|_Y)$ sur le même corps $\mathbb{F}$. Un **opérateur linéaire** $L : X \to Y$ est une application telle que

$$L(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 L x_1 + \alpha_2 L x_2$$

pour tout $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$ et $x_1, x_2 \in X$. On note aussi $L : (X, \|.\|_X) \to (Y, \|.\|_Y)$. L'**image** de L est définie par

$$R(L) := \{Lx : x \in X\} \subset Y,$$

et le **noyau** de L par

$$N(L) := \{x \in X : Lx = 0\} \subset X.$$

Ces deux ensembles sont des sous-espaces vectoriels. Un opérateur linéaire $L : X \to Y$ est **borné** si, par définition,

$$\exists M \in [0, \infty[\text{ tel que } \forall x \in X, \|Lx\|_Y \leq M\|x\|_X.$$

On utilise aussi les notations $N(L) = \ker(L)$ et $R(L) = \mathrm{im}(L) = \mathrm{range}(L) = \mathrm{rge}(L)$.

3.2 Exemple : les opérateurs intégraux.

Soit $-\infty < a < b < \infty$ et $k \in C([a, b]^2, \mathbb{F})$. Pour $f \in C([a, b], \mathbb{F})$, on définit la fonction $Kf \in C([a, b], \mathbb{F})$ par

$$(Kf)(s) := \int_a^b k(s, t) f(t) dt, \quad s \in [a, b].$$

Alors

$$K : (C[a, b], < ., . >) \to (C[a, b], < ., . >)$$

est linéaire et borné.

Vérifions l'aspect "borné" :

$$\begin{aligned}
\|Kf\|_2^2 &= \int_a^b \left| \int_a^b k(s,t)f(t)dt \right|^2 ds \leq \int_a^b \left(\int_a^b |k(s,t)||f(t)|dt \right)^2 ds \\
&\overset{C-S}{\leq} \int_a^b \left(\int_a^b |k(s,t)|^2 dt \int_a^b |f(t)|^2 dt \right) ds \\
&= \int_a^b \int_a^b |k(s,t)|^2 dsdt \int_a^b |f(t)|^2 dt.
\end{aligned}$$

On peut choisir $M = (\int_a^b \int_a^b |k(s,t)|^2 dsdt)^{1/2}$ dans la définition du paragraphe précédent, on obtient alors que $\|Kf\|_2 \leq M\|f\|_2$ pour tout $f \in C[a,b]$.

Remarque. De même, $K : (C[a,b], \|.\|_\infty) \to (C[a,b], \|.\|_\infty)$ est borné. Voir la série 3.

3.3 Opérateurs linéaires continus.

L'opérateur linéaire $T : (X, \|.\|_X) \to (Y, \|.\|_Y)$ est dit **continu** en $x \in X$ si $Tx_n \to Tx$ dans $(Y, \|.\|_Y)$ chaque fois que $x_n \to x$ dans $(X, \|.\|_X)$.
Si T est continu en tout $x \in X$, on dit que T est continu (sur X).

3.4 Théorème.

Pour un opérateur linéaire $T : X \to Y$, les affirmations suivantes sont équivalentes :

(a) T est borné ;

(b) T est continu ;

(c) T est continu en un point ;

(d) $\sup\{\|Tx\|_Y : x \in X \ , \ \|x\|_X \leq 1\} < \infty$.

Démonstration. $\underline{(a) \Rightarrow (b)}$: Soit $M \in [0, \infty[$ tel que, pour tout $x \in X$,

$$\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X.$$

Pour tout $p \in X$ et toute suite $\{x_n\} \subset X$ telle que $x_n \to p$, on a

$$\|Tx_n - Tp\|_Y = \|T(x_n - p)\|_Y \leq M\|x_n - p\|_X \to 0,$$

d'où $Tx_n \to Tp$.

$\underline{(b) \Rightarrow (c)}$: Evident.

$\underline{(c) \Rightarrow (d)}$: Supposons qu'il existe $p \in X$ tel que $Tx_n \to Tp$ pour toute suite $\{x_n\} \subset X$ telle que $x_n \to p$. Par l'absurde, supposons aussi que $\sup\{\|Tx\|_Y : x \in X\ ,\ \|x\|_X \leq 1\} = \infty$. Il existe donc $\{z_n\} \subset X$ telle que $\|z_n\|_X \leq 1$ et $\lim_{n\to\infty} \|Tz_n\|_Y = \infty$. Posons

$$x_n = p + \frac{z_n}{\|Tz_n\|_Y}.$$

On obtient $x_n \to p$, mais $\|Tx_n - Tp\|_Y = \|T(z_n/\|Tz_n\|_Y)\|_Y = 1$, qui ne converge pas vers 0. Nous avons donc obtenu une contradiction.

$\underline{(d) \Rightarrow (a)}$: Pour $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} \|Tx\|_Y &= \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right)\right\|_Y \|x\|_X \\ &\leq \sup_{\|z\|_X \leq 1} \|Tz\|_Y \|x\|_X = M\|x\|_X, \end{aligned}$$

où $M = \sup_{\|z\|_X \leq 1} \|Tz\|_Y$. Ceci reste vrai pour $x = 0$. $\square$

3.5 Norme d'un opérateur linéaire et borné.

Si $L : X \to Y$ est linéaire et borné, sa **norme** est définie par

$$\|L\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Lx\|_Y < \infty \quad \text{(cf théorème 3.4).}$$

Exemple : au §3.2, l'opérateur $K : (C[a,b], <.,.>) \to (C[a,b], <.,.>)$ satisfait $||K|| \leq M = \{\int_a^b \int_a^b |k(s,t)|^2 ds\, dt\}^{1/2}$

3.6 Proposition.

(a) Soit $L : X \to Y$ un opérateur linéaire borné. Alors, pour tout $x \in X$, $\|Lx\|_Y \leq \|L\| \|x\|_X$.

(b) Soient deux opérateurs linéaires bornés $L, T : X \to Y$. Alors $L + T : X \to Y$, défini par $(L+T)x = Lx + Tx$ (pour tout $x \in X$), est un opérateur linéaire borné. De plus on a que $\|L + T\| \leq \|L\| + \|T\|$.

(c) Soient deux opérateurs linéaires bornés $L : X \to Y$ et $T : Y \to Z$. Alors $T \circ L : X \to Z$ est un opérateur linéaire borné et $\|T \circ L\| \leq \|T\| \|L\|$.

Démonstration. (a) Si $x \neq 0$, alors $\|Lx\|_Y = \|L(x/\|x\|_X)\|_Y \|x\|_X \leq \|L\| \|x\|_X$.

(b) Pour tout $x \in X$,

$$\begin{aligned} \|(L+T)x\|_Y &\leq \|Lx\|_Y + \|Tx\|_Y \\ &\leq \|L\|\|x\|_X + \|T\|\|x\|_X = (\|L\| + \|T\|)\|x\|_X. \end{aligned}$$

On en conclut donc que $L + T$ est borné et

$$\|L + T\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|(L+T)x\|_Y \leq \|L\| + \|T\|.$$

(c) Pour tout $x \in X$,

$$\|(T \circ L)x\|_Z \overset{(a)}{\leq} \|T\| \, \|Lx\|_Y \overset{(a)}{\leq} \|T\|\|L\|\|x\|_X.$$

On en conclut donc que $T \circ L$ est borné et

$$\|T \circ L\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|(T \circ L)x\|_Z \leq \|T\|\|L\|.$$

□

3.7 L'ensemble $\mathcal{L}(X, Y)$.

Soient des evn $(X, \|.\|_X)$ et $(Y, \|.\|_Y)$ sur $\mathbb{F}$. On note alors $\mathcal{L}(X, Y)$ l'ensemble des opérateurs linéaires bornés $L : X \to Y$. Notons que c'est un espace vectoriel sur $\mathbb{F}$:

- le vecteur nul est $L = 0$ sur tout X,
- $(L + T)x := Lx + Tx$ pour tout $x \in X$,
- $(\alpha L)x := \alpha Lx$ pour tout $x \in X$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{F}$.

Muni de la norme $\|L\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Lx\|_Y$, $(\mathcal{L}(X, Y), \|.\|)$ est un evn (à vérifier !). Si $X = Y$, on note aussi $\mathcal{L}(X)$ à la place de $\mathcal{L}(X, X)$.

3.8 Théorème.

Si Y est un espace de Banach, alors $(\mathcal{L}(X, Y), \|.\|)$ est un espace de Banach.

Démonstration. Soit une suite de Cauchy $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$, c'est-à-dire que

$$\forall \epsilon > 0 \ , \ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall m \geq N \ , \ \forall n \geq N \ , \ \|T_n - T_m\| < \epsilon.$$

Pour tout $x \in X$, $\{T_n x\}$ est une suite de Cauchy dans Y, car

$$\|T_n x - T_m x\|_Y = \|(T_n - T_m)x\|_Y \leq \|T_n - T_m\| \|x\|_X.$$

Comme Y est complet, $\{T_n x\}$ converge vers une certaine limite, notée $\hat{T}x \in Y$. Ceci étant valable pour tout $x \in X$, ceci définit un opérateur linéaire $\hat{T} : X \to Y$ (vérifier sa linéarité).
Fixons maintenant $\epsilon > 0$. On sait alors qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall m \geq N \ , \forall n \geq N \ , \forall x \in X \ , \|(T_n - T_m)x\|_Y \leq \epsilon \|x\|_X \quad \text{(cf §3.6 (a))},$$

qui s'écrit aussi

$$\forall m \geq N \ , \forall x \in X \ , \forall n \geq N \ , \|(T_n - T_m)x\|_Y \leq \epsilon \|x\|_X.$$

Pour x et m fixés, on laisse tendre n vers l'infini, ce qui donne

$$\forall m \geq N \ , \forall x \in X \ , \|(\hat{T} - T_m)x\|_Y \leq \epsilon \|x\|_X \ .$$

Cette dernière inégalité montre que $\hat{T} - T_N$ est borné, et donc $\hat{T} = (\hat{T} - T_N) + T_N$ est borné (cf §3.6 (b)). On a montré que

$$\forall \epsilon > 0 \ , \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall m \geq N \ , \|\hat{T} - T_m\| \leq \epsilon,$$

et donc $T_m \to \hat{T}$ dans $\mathcal{L}(X, Y)$. □

3.9 Théorème (série de Neumann).

Soient un espace de Banach X, l'opérateur identité $I : X \to X$, $T \in \mathcal{L}(X)$ et $\|T\| < 1$. Alors $S := \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} T^j$ existe dans $\mathcal{L}(X)$ (où T^j représente l'opérateur T composé j fois avec lui même, et $T^0 = I$) et $(I - T) \circ S = S \circ (I - T) = I$.
Autrement dit, $I - T$ est inversible, $(I - T)^{-1} = S \in \mathcal{L}(X)$, et finalement $\|(I - T)^{-1}\| \leq 1/(1 - \|T\|)$.

Démonstration. Soit $S_n = \sum_{j=0}^{n} T^j$. Par la proposition 3.6, $\|T^j\| \leq \|T\|^j$. Pour $m > n$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|S_m - S_n\| &= \|\sum_{j=n+1}^{m} T^j\| \leq \sum_{j=n+1}^{m} \|T^j\| \leq \sum_{j=n+1}^{m} \|T\|^j \\ &= \|T\|^{n+1} \sum_{j=0}^{m-(n+1)} \|T\|^j \leq \|T\|^{n+1} \frac{1}{1 - \|T\|}. \end{aligned}$$

Etant donné $\epsilon > 0$, choisissons $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tel que $\|T\|^{N+1}/(1 - \|T\|) < \epsilon$ (possible car $\|T\| < 1$). Pour tout $m > n \geq N$, on obtient donc $\|S_m - S_n\| <$

ϵ. Ainsi $\{S_n\}_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(X)$ et converge donc vers un certain $S \in \mathcal{L}(X)$ (cf §3.8). De plus $\|T^n\| \leq \|T\|^n \to 0$ quand $n \to \infty$. En prenant la limite lorsque $n \to \infty$ dans

$$(I-T)\circ S_n = S_n \circ (I-T) = \sum_{j=0}^{n} T^j - \sum_{j=1}^{n+1} T^j = I - T^{n+1},$$

on obtient $(I-T)\circ S = S\circ(I-T) = I$. Nous avons aussi utilisé ici les égalités

$$\lim_{n\to\infty}(I-T)\circ S_n = (I-T)\circ S \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} S_n\circ(I-T) = S\circ(I-T)$$

dans $\mathcal{L}(X)$, sachant que $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ dans $\mathcal{L}(X)$. En effet on a :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{n\to\infty}\|(I-T)\circ S_n - (I-T)\circ S\| \\ &= \lim_{n\to\infty}\|(I-T)\circ(S_n - S)\| \leq \lim_{n\to\infty}\|I-T\|\|S_n - S\| = 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{n\to\infty}\|S_n\circ(I-T) - S\circ(I-T)\| \\ &= \lim_{n\to\infty}\|(S_n - S)\circ(I-T)\| \leq \lim_{n\to\infty}\|S_n - S\|\|I-T\| = 0. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\|S\| = \lim_{n\to\infty}\|S_n\| \leq \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n}\|T\|^j = \frac{1}{1-\|T\|}.$$

□

3.10 Théorème.

Soit un espace de Banach X. Alors l'ensemble

$$\{L \in \mathcal{L}(X) : L^{-1} \text{ existe dans } \mathcal{L}(X)\}$$

est ouvert dans $\mathcal{L}(X)$.

Démonstration. Preuve dans le cas $X \neq \{0\}$: soit un opérateur $L \in \mathcal{L}(X)$ inversible dans $\mathcal{L}(X)$, et soit $T \in \mathcal{L}(X)$ tel que $\|L-T\| < 1/\|L^{-1}\|$.
Observons que $T = L - (L-T) = L\circ\{I - L^{-1}\circ(L-T)\}$.
Comme $\|L^{-1}\circ(L-T)\| \leq \|L^{-1}\|\|L-T\| < 1$, le théorème 3.9 assure que $I - L^{-1}\circ(L-T)$ est inversible dans $\mathcal{L}(X)$. D'où $T = L\circ\{I-L^{-1}\circ(L-T)\}$ est inversible, son inverse étant donné par $T^{-1} = \{I-L^{-1}\circ(L-T)\}^{-1}\circ L^{-1}$, qui est bien un opérateur borné en tant que composition de deux opérateurs bornés (cf §3.6(c)). □

3.11 Opérateurs compacts.

Soient deux evn X et Y sur $\mathbb{F}$. Un opérateur linéaire $T : X \to Y$ est dit **compact** si, pour toute suite bornée $\{x_n\} \subset X$, la suite $\{Tx_n\} \subset Y$ admet une sous-suite convergente.

3.12 Proposition.

Soient deux evn X et Y. Tout opérateur linéaire compact $T : X \to Y$ est borné.

Démonstration. Supposons que $T : X \to Y$ n'est pas borné. Il existe donc une suite $\{x_n\} \subset X$ telle que $\|x_n\|_X \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n\to\infty} \|Tx_n\|_Y = \infty$ (cf théorème 3.4). Comme $\{Tx_n\}$ n'a aucune sous-suite convergente, T ne peut être compact. $\square$

3.13 Théorème.

Soient des evn X et Y sur $\mathbb{F}$, avec Y *complet*. Soient une suite $\{T_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ et $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ tels que $\|T_n - T\| \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Si T_n est compact pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors T est compact.

Démonstration. Soit une suite bornée $\{x_m\} \subset X$, c'est-à-dire que

$$\exists c \in]0, \infty[\text{ tel que } \forall m \in \mathbb{N} \text{ , } \|x_m\|_X \leq c.$$

Comme T_1 est compact, $\{x_m\}$ a une sous-suite $\{x_{1,m}\}$ telle que $\{T_1 x_{1,m}\}$ converge dans Y.
Comme T_2 est compact, $\{x_{1,m}\}$ a une sous-suite $\{x_{2,m}\}$ telle que $\{T_2 x_{2,m}\}$ converge dans Y.
En continuant ainsi, on obtient une sous-suite $\{x_{n,m}\}_{m\geq 1}$ de $\{x_m\}$ telle que $\{T_n x_{n,m}\}_{m\geq 1}$ converge, ceci pour chaque $n \in \mathbb{N}$. De plus $\{x_{n,m}\}_{m\geq 1}$ est une sous-suite de $\{x_{n-1,m}\}_{m\geq 1}$ pour tout $n \geq 2$.
La sous-suite diagonale $\{z_m\}_{m\geq 1} := \{x_{m,m}\}_{m\geq 1}$ est telle que $\{z_m\}_{m\geq n}$ est une sous-suite de $\{x_{n,m}\}_{m\geq n}$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $\{T_n z_m\}_{m\geq 1}$ converge dans Y pour chaque $n \in \mathbb{N}$.
Fixons $\epsilon > 0$ et soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $\|T - T_p\| < \epsilon/(3c)$. Comme $\{T_p z_m\}_{m\geq 1}$ est une suite de Cauchy (car elle converge), il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $j, k \geq N$, $\|T_p z_j - T_p z_k\|_Y < \epsilon/3$. D'où

$$\begin{aligned}
\|Tz_j - Tz_k\|_Y &\leq \|(T - T_p)z_j\|_Y + \|T_p(z_j - z_k)\|_Y + \|(T_p - T)z_k\|_Y \\
&< \frac{\epsilon}{3c}c + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3c}c = \epsilon
\end{aligned}$$

si $j, k \geq N$. Ainsi la suite de Cauchy $\{Tz_m\}$ converge dans l'espace de Banach Y. $\square$

3.14 Exemple : les opérateurs intégraux.

Pour $-\infty < a < b < \infty$ et $k \in C([a,b]^2, \mathbb{F})$, soit l'opérateur intégral $K : C([a,b],\mathbb{F}) \to C([a,b],\mathbb{F})$ défini par

$$(Kf)(s) := \int_a^b k(s,t)f(t)dt, \quad s \in [a,b].$$

Alors l'opérateur linéaire $K : (C[a,b], <.,.>) \to (C[a,b], ||\cdot||_\infty)$ est compact.

Pour le montrer, considérons une suite bornée $\{f_n\} \subset C[a,b]$, c'est-à-dire que

$$\exists M > 0 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N} \ , \ \int_a^b |f_n(t)|^2 dt \leq M^2,$$

et considérons la suite $\{g_n\} \subset C[a,b]$ définie par $g_n = Kf_n$. Le théorème d'**Ascoli-Arzelà** (cf cours "Espaces métriques et topologiques") assure que si les deux conditions suivantes sont vérifiées,

(H1) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|g_n\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \max_{a\leq s\leq b} |g_n(s)| < \infty$;

(H2) la suite $\{g_n\}$ est équicontinue, c'est-à-dire

$$\forall \epsilon > 0 \ , \ \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } \forall s_1, s_2 \in [a,b] \ , \ \Big(|s_1 - s_2| < \delta \Rightarrow |g_n(s_1) - g_n(s_2)| < \epsilon\Big),$$

alors $\{g_n\}$ admet une sous-suite qui converge dans $(C[a,b], \|.\|_\infty)$.
Commençons par vérifier (H1). Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $s \in [a,b]$, nous avons

$$\begin{aligned} |g_n(s)| &= \left|\int_a^b k(s,t)f_n(t)dt\right| \leq \int_a^b |k(s,t)||f_n(t)|dt \\ &\overset{C-S}{\leq} \left(\int_a^b |k(s,t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \|f_n\|_2 \\ &\leq \sqrt{b-a} \max_{u,v\in[a,b]} |k(u,v)| M < \infty. \end{aligned}$$

Vérifions maintenant la condition (H2). Choisissons pour cela un $\epsilon > 0$. Puisque k est continu sur le fermé borné $[a,b]^2$, k est uniformément continu. Il existe donc $\delta > 0$ tel que, pour tout $s_1, s_2, t_1, t_2 \in [a,b]$,

$$\sqrt{(s_1 - s_2)^2 + (t_1 - t_2)^2} < \delta \Rightarrow |k(s_1,t_1) - k(s_2,t_2)| < \frac{\epsilon}{2M\sqrt{b-a}}.$$

D'où, pour $s_1, s_2 \in [a,b]$ tels que $|s_1 - s_2| < \delta$, on a

$$\begin{aligned} |g_n(s_1) - g_n(s_2)| &\leq \int_a^b |k(s_1,t) - k(s_2,t)||f_n(t)|dt \\ &\leq \frac{\epsilon}{2M\sqrt{b-a}} \int_a^b 1.|f_n(t)|dt \\ &\overset{C-S}{\leq} \frac{\epsilon}{2M\sqrt{b-a}} \sqrt{\int_a^b 1^2 dt}\, \|f_n\|_2 \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon. \end{aligned}$$

Nous pouvons alors appliquer le théorème d'Ascoli-Arzelà à la suite $\{g_n\}$ que nous nous sommes donnée. Il existe donc $g \in C[a,b]$ et une sous-suite $\{g_{n_j}\}$ tels que $\|g_{n_j} - g\|_\infty \to 0$.

3.15 Suite de l'exemple

Pour $-\infty < a < b < \infty$ et $k \in C([a,b]^2, \mathbb{F})$, l'opérateur intégral

$$K : (C([a,b],\mathbb{F}), <.,.>) \to (C([a,b],\mathbb{F}), <.,.>)$$

est compact.

En effet, soit une suite $\{f_n\} \subset C[a,b]$ telle que $\sup_{n\in\mathbb{N}} ||f_n||_2 < \infty$. Par le paragraphe précédent, il existe une sous-suite $\{f_{n_j}\}$ et $g \in C[a,b]$ tels que $||Kf_{n_j} - g||_\infty \to 0$. Il en résulte

$$\begin{aligned} ||Kf_{n_j} - g||_2 &= \left(\int_a^b |(Kf_{n_j})(s) - g(s)|^2 ds \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_a^b 1\, ds \right)^{1/2} ||Kf_{n_j} - g||_\infty = \sqrt{b-a}||Kf_{n_j} - g||_\infty \to 0 \end{aligned}$$

et donc $Kf_{n_j} \to g$ dans $(C[a,b], <.,.>)$.

Remarque. $K : (C[a,b], \|.\|_\infty) \to (C[a,b], \|.\|_\infty)$ est aussi compact (la preuve est similaire).

3.16 Lemme de Riesz

Soit un evn $(X, \|.\|)$ sur $\mathbb{F}$ et deux sous espaces vectoriels $Y, Z \subset X$ tels que $Y \underset{\neq}{\subset} Z$ et Y est fermé. Alors il existe $z \in Z$ tel que

$$\|z\| = 1 \quad \text{et} \quad \forall y \in Y \ \ \|z - y\| \geq \frac{1}{2}.$$

Démonstration. Soit $v \in Z \backslash Y$ et $a = \inf_{y \in Y} \|v - y\|$. Comme Y est fermé, $a > 0$ (en effet $a = 0$ conduirait à la contradiction $v \in Y$). Choisissons $y_0 \in Y$ tel que $a \leq \|v - y_0\| \leq 2a$ et posons

$$z = \|v - y_0\|^{-1}(v - y_0) \in Z.$$

Alors $\|z\| = 1$ et, pour tout $y \in Y$,

$$\begin{aligned}
\|z - y\| &= \big\| \, \|v - y_0\|^{-1}(v - y_0) - y \big\| \\
&= \|v - y_0\|^{-1} \big\|v \, - \, (y_0 + \|v - y_0\| y)\big\| \\
&\geq \|v - y_0\|^{-1} a \qquad \text{(car } y_0 + \|v - y_0\| y \in Y\text{)} \\
&\geq (2a)^{-1} a = \frac{1}{2} \, .
\end{aligned}$$

□

3.17 Théorème : sur le noyau de T_λ (T compact, $\lambda \neq 0$).

Soit un evn X sur $\mathbb{F}$, un opérateur linéaire compact $T : X \to X$, $\lambda \in \mathbb{F} \backslash \{0\}$ et $T_\lambda := T - \lambda I$, où $I : X \to X$ est l'opérateur identité. Alors $N(T_\lambda) \subset X$ est un sous-espace vectoriel fermé de dimension finie.

Démonstration. Comme T est compact, il est borné. Comme T_λ ausi est borné, donc continu, et $\{0\}$ est un fermé de X, $N(T_\lambda) = (T_\lambda)^{-1}(\{0\})$ est un fermé de X.

Vérifions que $E := \{x \in N(T_\lambda) : \|x\| \leq 1\}$ est compact. Soit une suite $\{x_n\} \subset E$. Comme elle est bornée et T est compact, elle admet une sous-suite $\{x_{n_k}\}$ telle que $\{Tx_{n_k}\}$ converge. Or $x_{n_k} \in N(T_\lambda)$ et ainsi $x_{n_k} = \lambda^{-1} T x_{n_k}$ ($\forall k \in \mathbb{N}$), et donc $\{x_{n_k}\}$ converge dans X, et même dans E car E est fermé. Ceci prouve que E est compact.

Vérifions qu'il en résulte que $N(T_\lambda)$ est de dimension finie en raisonnant par l'absurde : supposons le contraire. Il existe alors une suite $\{x_n\} \in N(T_\lambda)$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} \notin Z_n := \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, le lemme de Riesz assure l'existence de $z_{n+1} \in Z_{n+1} = \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ tel que

$$\|z_{n+1}\| = 1 \quad \text{et} \quad \forall y \in Z_n \;\; \|z_{n+1} - y\| \geq \frac{1}{2}.$$

On utilise ici un résultat vu en séries d'exercices qui affirme que tout sous-espace vectoriel de dimension finie (ici Z_n) d'un evn est un fermé. D'où, pour tout $i > j > 1$, $\|z_i - z_j\| \geq 1/2$. Ainsi la suite $\{z_n\}_{n \geq 2} \subset E$ n'a aucune sous-suite de Cauchy et donc aucune sous-suite convergente. Ceci contredit la compacité de E établie ci-dessus.

□

3.18 Théorème : sur l'emboîtement des noyaux.

Avec les mêmes hypothèses et notations que ci-dessus,

$$\{0\} = N(T_\lambda^0) \subset N(T_\lambda) \subset N(T_\lambda^2) \subset \ldots \subset N(T_\lambda^n) \subset N(T_\lambda^{n+1}) \subset \ldots$$

et tous ces sous-espaces vectoriels sont fermés et ont des dimensions finies, où $T_\lambda^0 := I$.

Démonstration. Pour tous $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ et $x \in X$, si $T_\lambda^n x = 0$, alors $T_\lambda^{n+1} x = T_\lambda(T_\lambda^n x) = T_\lambda 0 = 0$. Ceci montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N(T_\lambda^n) \subset N(T_\lambda^{n+1})$. Le cas $n = 0$ est évident.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, par la formule du binôme,

$$T_\lambda^n = (T - \lambda I)^n = (-\lambda)^n I + \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} T^k (-\lambda)^{n-k}$$

$$= T \circ \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} T^{k-1} (-\lambda)^{n-k} \right) + (-\lambda)^n I := T \circ S_n + (-\lambda)^n I. \qquad (\star)$$

Comme T est compact et S_n est borné, $T \circ S_n$ est compact (cf séries d'exercices). Le théorème précédent appliqué à $T \circ S_n$ et à $-(-\lambda)^n \in \mathbb{F} \backslash \{0\}$ assure que

$$N(T_\lambda^n) = N(T \circ S_n + (-\lambda)^n I)$$

est un sous-espace vectoriel fermé de dimension finie. □

3.19 Théorème : sur la constance des noyaux.

Avec les mêmes hypothèses et notations que ci-dessus, si $n \in \mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$ et $N(T_\lambda^n) = N(T_\lambda^{n+1})$, alors $N(T_\lambda^{n+1}) = N(T_\lambda^{n+2})$. De plus il existe $n \in \mathbb{N}_0$ tel que $N(T_\lambda^n) = N(T_\lambda^{n+1})$.

Démonstration. Supposons que $n \in \mathbb{N}_0$ et $N(T_\lambda^n) = N(T_\lambda^{n+1})$. Nous savons déjà que $N(T_\lambda^{n+1}) \subset N(T_\lambda^{n+2})$. Soit d'autre part $x \in N(T_\lambda^{n+2})$. Alors $T_\lambda^{n+1}(T_\lambda x) = 0$, $T_\lambda x \in N(T_\lambda^{n+1}) = N(T_\lambda^n)$ et donc $T_\lambda^n(T_\lambda x) = 0$. D'où $x \in N(T_\lambda^{n+1})$. Ceci prouve que $N(T_\lambda^{n+2}) \subset N(T_\lambda^{n+1})$, et donc ces sous-espaces vectoriels sont égaux.

Par l'absurde, supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, $N(T_\lambda^n)$ est un sous-espace vectoriel fermé strictement inclus dans $N(T_\lambda^{n+1})$. Par le lemme de Riesz, il existe $x_n \in N(T_\lambda^{n+1}) \backslash N(T_\lambda^n)$ tel que

$$\|x_n\| = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in N(T_\lambda^n) \ \ \|x_n - x\| \geq \frac{1}{2}. \qquad (\bullet)$$

Pour $n > m \geq 0$, on obtient

$$Tx_n - Tx_m = (T_\lambda x_n + \lambda x_n) - (T_\lambda x_m + \lambda x_m) = \lambda \Big(x_n + \lambda^{-1} T_\lambda x_n - \lambda^{-1} T_\lambda x_m - x_m \Big)$$

$$:= \lambda\Big(x_n - z_n\Big) \qquad (\bullet\bullet)$$

avec

$$T_\lambda^n z_n = T_\lambda^n\Big(-\lambda^{-1}T_\lambda x_n + \lambda^{-1}T_\lambda x_m + x_m\Big) = 0$$

car $x_n \in N(T_\lambda^{n+1})$ et $x_m \in N(T_\lambda^{m+1}) \subset N(T_\lambda^n) \subset N(T_\lambda^{n+1})$. Ainsi $z_n \in N(T_\lambda^n)$ et

$$\|Tx_n - Tx_m\| \overset{(\bullet\bullet)}{=} |\lambda|\,\|x_n - z_n\| \overset{(\bullet)}{\geq} \frac{|\lambda|}{2}$$

pour tous $n > m \geq 0$. La suite $\{Tx_n\}$ n'a donc aucune sous-suite de Cauchy. D'autre part la suite $\{x_n\}$ est bornée et donc, puisque T est compact, la suite $\{Tx_n\}$ admet une sous-suite convergente, et nous avons ainsi obtenu une contradiction. □

3.20 Théorème : sur l'image de T_λ.

Avec les mêmes hypothèses et notations que ci-dessus, $R(T_\lambda)$ est un fermé de X.

Démonstration. La preuve est pas l'absurde. Supposons que $R(T_\lambda)$ n'est pas fermé. Alors il existe une suite $\{x_n\} \subset X$ et $y \in \overline{R(T_\lambda)}\backslash R(T_\lambda)$ tels que $T_\lambda x_n \to y$.

Observons d'abord que $y \neq 0$ et donc $T_\lambda x_n \neq 0$ pour tout n suffisamment grand. Sans perte de généralité, on peut donc supposer que $x_n \notin N(T_\lambda)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit

$$\delta_n = \inf\{\|x_n - z\| : z \in N(T_\lambda)\}.$$

Comme $N(T_\lambda)$ est fermé et $x_n \notin N(T_\lambda)$, $\delta_n > 0$. Soit $z_n \in N(T_\lambda)$ tel que

$$0 < \delta_n \leq \|x_n - z_n\| \leq 2\delta_n.$$

Vérifions que $\lim_{n\to\infty} \delta_n = +\infty$. Si ce n'est pas le cas, $\{x_n - z_n\}$ a une sous-suite bornée. Quitte à en extraire encore une sous-suite, comme T est compact, il existe une sous-suite $\{x_{n_k} - z_{n_k}\}$ telle que $T(x_{n_k} - z_{n_k})$ converge vers un certain $w \in X$. Or $I = \frac{1}{\lambda}(T - T_\lambda)$ et donc

$$x_{n_k} - z_{n_k} = \frac{1}{\lambda}T(x_{n_k} - z_{n_k}) - \frac{1}{\lambda}(T_\lambda x_{n_k} - T_\lambda z_{n_k}) = \frac{1}{\lambda}T(x_{n_k} - z_{n_k}) - \frac{1}{\lambda}T_\lambda x_{n_k}$$

$$\to \frac{1}{\lambda}(w - y).$$

Comme T est compact, T est borné, donc T_λ aussi, et donc T_λ est continu. D'où

$$y = \lim_{k\to\infty} T_\lambda x_{n_k} = \lim_{k\to\infty} T_\lambda(x_{n_k} - z_{n_k}) = T_\lambda(\lambda^{-1}(w - y)) \in R(T_\lambda).$$

Ceci contredit $y \notin R(T_\lambda)$ (cf la définition de y).

Ainsi nous pouvons supposer que $\delta_n \to +\infty$. Reprenons l'idée de l'argument précédent, mais en utilisant la suite bornée $\{\delta_n^{-1}(x_n - z_n)\}$. Comme T est compact, il existe une sous-suite $\{x_{n_k} - z_{n_k}\}$ telle que $T(\delta_{n_k}^{-1}(x_{n_k} - z_{n_k}))$ converge vers un certain $w \in X$. Or $I = \frac{1}{\lambda}(T - T_\lambda)$ et donc

$$\begin{aligned}
\delta_{n_k}^{-1}(x_{n_k} - z_{n_k}) &= \frac{1}{\lambda}T(\delta_{n_k}^{-1}(x_{n_k} - z_{n_k})) - \frac{1}{\lambda}T_\lambda(\delta_{n_k}^{-1}(x_{n_k} - z_{n_k})) \\
&= \frac{1}{\lambda}T(\delta_{n_k}^{-1}(x_{n_k} - z_{n_k})) - \frac{1}{\lambda\delta_{n_k}}T_\lambda x_{n_k} \to \frac{1}{\lambda}w
\end{aligned}$$

car $T_\lambda x_{n_k} \to y$ et $\delta_{n_k} \to +\infty$. Ainsi

$$w = \lim_{k\to\infty} T(\delta_{n_k}^{-1}(x_{n_k} - z_{n_k})) = T(w/\lambda)$$

et $w \in N(T_\lambda)$. D'où, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\left\| x_{n_k} - z_{n_k} - \frac{\delta_{n_k}}{\lambda}w \right\| \geq \delta_{n_k}$$

et la contradiction

$$1 \leq \left\| \delta_{n_k}^{-1}(x_{n_k} - z_{n_k}) - \frac{1}{\lambda}w \right\| \to 0.$$

□

3.21 Proposition : une implication entre l'image et le noyau.

Avec les mêmes hypothèses et notations que ci-dessus,

$$R(T_\lambda) = X \;\Rightarrow\; N(T_\lambda) = \{0\}.$$

Démonstration. Supposons que $R(T_\lambda) = X$. Pour tout $x_1 \in N(T_\lambda)$, choisissons $x_2 \in X$ tel que $T_\lambda x_2 = x_1$, et ensuite $x_3 \in X$ tel que $T_\lambda x_3 = x_2$, etc. Ceci conduit à une suite $\{x_n\} \subset X$ telle que $T_\lambda x_{n+1} = x_n$ pour tout $n \geq 1$. D'où

$$T_\lambda^{n+1} x_{n+1} = T_\lambda^n x_n = \ldots = T_\lambda x_1 = 0$$

pour tout $n \geq 1$, et trivialement pour $n = 0$. Soit $k \in \mathbb{N}_0$ tel que $N(T_\lambda^{k+1}) = N(T_\lambda^k)$ (un tel k existe par le Théorème 3.19). Alors, comme $T_\lambda^{k+1}x_{k+1} = 0$, on a $T_\lambda^k x_{k+1} = 0$ et donc

$$0 = T_\lambda^k x_{k+1} = T_\lambda^{k-1} x_k = \ldots = T_\lambda^1 x_2 = x_1\,.$$

On a ainsi prouvé que $T_\lambda x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$, autrement dit, que $N(T_\lambda) = \{0\}$. □

Chapitre 4

Valeurs propres d'un opérateur linéaire, symétrique et compact

4.1 Valeurs propres, vecteurs propres, espaces propres.

Soient un evn X et $T \in \mathcal{L}(X)$. Une **valeur propre** de T est un nombre $\lambda \in \mathbb{F}$ tel que $Tu = \lambda u$ pour un certain $u \in X$ non nul, qui est appelé **vecteur propre**. Si λ est une valeur propre, $N(T-\lambda I)$ est l'**espace propre** correspondant à λ.

4.2 Opérateurs symétriques.

Soit un espace préhilbertien $(X, <.,.>)$. Un opérateur $A \in \mathcal{L}(X)$ est symétrique si

$$\forall x \in X \ , \ \forall y \in X \ , \ < Ax, y > = < x, Ay > .$$

4.3 Exemple.

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ défini par

$$z = Ax \ \text{ ssi } \ z_k = \sum_{l=1}^{n} \alpha_{k,l} x_l, \ \ 1 \le k \le n,$$

où $(\alpha_{k,l})$ est une matrice carrée avec coefficients dans $\mathbb{F}$.
Alors A est symétrique (par rapport au produit scalaire standard) ssi $\alpha_{k,l} = \overline{\alpha_{l,k}}$. En effet

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{n} \alpha_{k,l} x_l \right) \overline{y_k} = \sum_{l=1}^{n} x_l \overline{\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{l,k} y_k \right)}$$

pour tout $x, y \in \mathbb{F}^n$ ssi $\alpha_{k,l} = \overline{\alpha_{l,k}}$ pour tout $1 \leq k, l \leq n$.

4.4 Proposition.

Soient un espace préhilbertien $(X, <.,.>)$ sur $\mathbb{F}$ et un opérateur symétrique $A \in \mathcal{L}(X)$. Alors

(i) toutes les valeurs propres de A sont réelles ;

(ii) si $Au = \lambda u$, $Av = \mu v$, $u \neq 0$, $v \neq 0$ et $\lambda \neq \mu$, alors $< u, v >= 0$.

Démonstration. (i) Si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, c'est évident. Si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, soient $\lambda \in \mathbb{F}$ et $u \in X \setminus \{0\}$ tels que $Au = \lambda u$. On obtient

$$\begin{aligned} \lambda < u, u > &= < \lambda u, u >=< Au, u > \\ &= < u, Au >=< u, \lambda u >= \overline{\lambda} < u, u >, \end{aligned}$$

et donc $\lambda = \overline{\lambda}$.

(ii) Comme $\mu \in \mathbb{R}$ (par le point (i)), on a

$$\begin{aligned} (\lambda - \mu) < u, v > &= < Au, v > - < u, Av > \\ &= < Au, v > - < Au, v >= 0, \end{aligned}$$

et donc $< u, v >= 0$. $\square$

4.5 Théorème.

Soient un espace préhilbertien $(X, <.,.>)$ sur $\mathbb{F}$ et $A \in \mathcal{L}(X)$ symétrique. Alors

$$\|A\| = \sup\{| < Ax, x > | : x \in X \ , \ \|x\| \leq 1\}.$$

Remarque : $< Ax, x >=< x, Ax >= \overline{< Ax, x >}$, et donc $< Ax, x > \in \mathbb{R}$ même lorsque $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Démonstration. Pour tout $x \in X$ tel que $\|x\| \leq 1$,

$$| < Ax, x > | \overset{C-S}{\leq} \|Ax\| \|x\| \leq \|A\| \|x\| \|x\| \leq \|A\|,$$

et donc $M := \sup\{| < Ax, x > | : x \in X \ , \ \|x\| \leq 1\} \leq ||A||$.
Notons que

$$| < Az, z > | \leq M\|z\|^2 \text{ pour tout } z \in X. \qquad (*)$$

Réciproquement, pour $x \in X$, $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $v = Ax/\beta$,

$$\begin{aligned}
\|Ax\|^2 &= \frac{1}{4}(2 < A(\beta x), v > +2 < Av, \beta x >) \\
&= \frac{1}{4}(< A(\beta x + v), \beta x + v > - < A(\beta x - v), \beta x - v >) \\
&\overset{(*)}{\leq} \frac{1}{4}M(\|\beta x + v\|^2 + \|\beta x - v\|^2) \\
&= \frac{1}{4}M(< \beta x, \beta x > + < v, v > + < \beta x, v > + < v, \beta x > \\
&\quad + < \beta x, \beta x > + < v, v > - < \beta x, v > - < v, \beta x >) \\
&= \frac{M}{2}(\|\beta x\|^2 + \|v\|^2).
\end{aligned}$$

Supposons que $Ax \neq 0$ et choisissons $\beta = (\|Ax\|/\|x\|)^{1/2}$. Nous obtenons alors

$$\|Ax\|^2 \leq \frac{M}{2}\left(\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\|x\|^2 + \frac{\|x\|}{\|Ax\|}\|Ax\|^2\right) = M\|Ax\|\|x\|,$$

et donc $\|Ax\| \leq M\|x\|$. Ceci reste valable si $Ax = 0$, d'où $\|A\| \leq M$. $\square$

4.6 Théorème.

Soient un espace préhilbertien $(X, < ., . >)$ et $A \in \mathcal{L}(X)$ qui est symétrique, compact et tel que $\|A\| > 0$. Alors $\|A\|$ ou $-\|A\|$ est une valeur propre de A (éventuellement les deux à la fois).

Démonstration. Par le théorème 4.5, il existe une suite $\{x_n\}$ telle que $\|x_n\| \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $m := \lim_{n\to\infty} < Ax_n, x_n >= \pm\|A\|$. Nous obtenons

$$\begin{aligned}
0 &\leq \|Ax_n - mx_n\|^2 \\
&= \|Ax_n\|^2 + m^2\|x_n\|^2 - m < Ax_n, x_n > -m < x_n, Ax_n > \\
&\leq \|A\|^2 + m^2 - m < Ax_n, x_n > -m < x_n, Ax_n > \\
&\to \|A\|^2 + m^2 - 2m^2 = 0. \qquad (4.1)
\end{aligned}$$

Comme A est compact, il existe une sous-suite $\{x_{n_k}\}$ telle que $\{Ax_{n_k}\}$ converge vers un certain $z \in X$. On a alors que

$$\|z\| = \lim_{k\to\infty} \|Ax_{n_k}\| \overset{C.-S.}{\geq} \lim_{k\to\infty} | < Ax_{n_k}, x_{n_k} > | = \|A\| > 0$$

et

$$\begin{aligned}
Az - mz &= \lim_{k\to\infty}(A^2 x_{n_k} - mAx_{n_k}) \\
&= A \lim_{k\to\infty}(Ax_{n_k} - mx_{n_k}) \overset{(4.1)}{=} 0.
\end{aligned}$$

Ainsi z est un vecteur propre correspondant à la valeur propre $m = \pm\|A\|$.
$\square$

4.7 Théorème spectral pour les opérateurs symétriques et compacts ($1^{\text{ère}}$ version).

Soient un espace préhilbertien $(X, < .,. >)$ et $A \in \mathcal{L}(X)$ symétrique, compact et tel que $\|A\| > 0$. Alors il existe une suite finie ou infinie $(\lambda_1, e_1), (\lambda_2, e_2), ...$ dans $\mathbb{R} \times X$ telle que les propriétés suivantes sont vérifiées :

(i) Pour tout $n = 1, 2, ...,$

$$Ae_n = \lambda_n e_n \ , \ \|e_n\| = 1 \ , \ \lambda_n \neq 0;$$

(ii) $< e_m, e_n >= \delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n, \\ 0 & \text{si } m \neq n; \end{cases}$

(iii) Si la suite est infinie, alors $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$;

(iv) Si la suite est infinie, alors pour tout $x \in X$ on a

$$\lim_{n\to\infty} \|Ax - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k < x, e_k > e_k\| = 0,$$

et si la suite est finie, alors pour tout $x \in X$ on a

$$Ax = \sum \lambda_k < x, e_k > e_k \text{ (somme finie sur tous les } k).$$

(v) Chaque valeur propre non nulle de A apparaît dans la suite $\lambda_1, \lambda_2, ...$

(vi) Pour chaque $n = 1, 2, ...,$ l'espace $N(A - \lambda_n I)$ est de dimension finie égale au nombre d'occurrences de λ_n dans la suite $\lambda_1, \lambda_2, ...$

Démonstration. Nous allons construire par induction une suite (finie ou infinie) $X = X_1 \supset X_2 \supset X_3 \supset ...$ de sous-espaces vectoriels et une suite $(\lambda_1, e_1), (\lambda_2, e_2), ...$ dans $\mathbb{R} \times X$ telles que

(a_n) $< e_j, e_k >= \delta_{j,k}$ et $Ae_k = \lambda_k e_k$ pour tous $1 \leq j, k \leq n$;

(b_n) $X = X_n \oplus \text{span}\{e_1, ..., e_{n-1}\}$;

(c_n) $X_n \perp \text{span}\{e_1, ..., e_{n-1}\}$;

(d_n) $R(A|_{X_n}) \subset X_n$, $A|_{X_n} \in \mathcal{L}(X_n)$, $|\lambda_n| = \|A|_{X_n}\| > 0$, $e_n \in X_n$,

pour $n = 1, 2, ...$
Dans (b_n) et (c_n), on pose $\text{span}\{e_1, ..., e_{n-1}\} = \{0\}$ si $n = 1$. Pour $n = 1$, on choisit $X_1 = X$, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ et $e_1 \in X$ tels que (grâce au théorème 4.6)

$$Ae_1 = \lambda e_1 \ , \ \|e_1\| = 1 \ , \ |\lambda_1| = \|A\|.$$

Soient donnés $n \geq 1$, X_n, $e_1, ..., e_n$, $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tels que (a_n),(b_n),(c_n) et (d_n) sont vrais. On définit

$$X_{n+1} := \{x \in X :< x, e_1 >= ... =< x, e_n >= 0\} \overset{(c_n)}{\subset} X_n.$$

Clairement (c_{n+1}) est satisfait et, pour tout $x \in X$,

$$x = \left(x - \sum_{k=1}^{n} < x, e_k > e_k \right) + \sum_{k=1}^{n} < x, e_k > e_k \in X_{n+1} \oplus \operatorname{span}\{e_1, ..., e_n\},$$

ce qui montre (b_{n+1}). Pour tout $x \in X_{n+1}$,

$$< Ax, e_k >=< x, Ae_k > \overset{(a_n)}{=} < x, \lambda_k e_k >= 0$$

pour $1 \leq k \leq n$. D'où $R(A|_{X_{n+1}}) \subset X_{n+1}$. De plus $A|_{X_{n+1}} : X_{n+1} \to X_{n+1}$ est compact (car X_{n+1} est fermé) et symétrique. Si $A|_{X_{n+1}}$ est l'opérateur nul, alors la suite $(\lambda_1, e_1), (\lambda_2, e_2), ...$ est de longeur finie égale à n. Sinon le théorème 4.6 appliqué à X_{n+1} et $A|_{X_{n+1}}$ assure l'existence de $(\lambda_{n+1}, e_{n+1}) \in \mathbb{R} \times X_{n+1}$ tel que

$$Ae_{n+1} = \lambda_{n+1} e_{n+1} \ , \ \|e_{n+1}\| = 1 \ , \ |\lambda_{n+1}| = \|A|_{X_{n+1}}\| > 0.$$

Par induction, on obtient ainsi $X = X_1 \supset X_2 \supset ...$ et $(\lambda_1, e_1), (\lambda_2, e_2), ...$ satisfaisant (a_n), (b_n), (c_n), (d_n) pour $n = 1, 2, ...$

Preuve de (i) et (ii) : (i) et (ii) sont clairement satisfaits.

Preuve de (iii). Par contradiction, supposons que $\limsup_{n \to \infty} |\lambda_n| > 0$ et choisissons une sous-suite telle que $\inf_{k \in \mathbb{N}} |\lambda_{n_k}| = c > 0$. Alors $\{e_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée telle que $\{Ae_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ n'a aucune sous-suite convergente. En effet,

$$\|Ae_{n_k} - Ae_{n_l}\|^2 = \|\lambda_{n_k} e_{n_k} - \lambda_{n_l} e_{n_l}\|^2 = \|\lambda_{n_k} e_{n_k}\|^2 + \|\lambda_{n_l} e_{n_l}\|^2 \geq 2c^2$$

pour tout $k \neq l$. Ceci contredit la compacité de A.

(iv) Si $(\lambda_1, e_1), (\lambda_2, e_2), ...$ est de longeur finie égale à $n \geq 1$, alors $A|_{X_{n+1}}$ est l'opérateur nul et, pour tout $x \in X$,

$$Ax - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k < x, e_k > e_k = A \left(x - \sum_{k=1}^{n} < x, e_k > e_k \right) = 0.$$

Supposons la suite $(\lambda_1, e_1), (\lambda_2, e_2), ...$ infinie. Pour $x \in X$,

$x - \sum_{k=1}^{n} < x, e_k > e_k \in X_{n+1}$ et donc

$$\begin{aligned}
\left\| Ax - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k < x, e_k > e_k \right\|^2 &= \left\| A\left(x - \sum_{k=1}^{n} < x, e_k > e_k \right) \right\|^2 \\
&\overset{(d_{n+1})}{\leq} |\lambda_{n+1}|^2 \left\| x - \sum_{k=1}^{n} < x, e_k > e_k \right\|^2 \\
&\leq |\lambda_{n+1}|^2 \left(\left\| x - \sum_{k=1}^{n} < x, e_k > e_k \right\|^2 + \left\| \sum_{k=1}^{n} < x, e_k > e_k \right\|^2 \right) \\
&\overset{Pythagore}{=} |\lambda_{n+1}|^2 \|x\|^2 \to 0
\end{aligned}$$

vu que $\lambda_n \to 0$.

Preuve de (v) et (vi). Soit $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times X$ tel que $Ax = \lambda x$, $\|x\| = 1$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si la suite $(\lambda_1, e_1), (\lambda_2, e_2), \ldots$ est infinie, alors

$$\begin{aligned}
0 &\overset{(iv)}{=} \lim_{n\to\infty} \left(Ax - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k < x, e_k > e_k \right) \\
&= \lambda x - \sum_{k\,:\,\lambda_k = \lambda} \lambda_k < x, e_k > e_k
\end{aligned}$$

car $< x, e_k >= 0$ si $\lambda_k \neq \lambda$ (cf la proposition 4.4). Notons que la somme est finie car $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0 \neq \lambda$. Puisque λx est différent de zéro, on en déduit $\{k \in \mathbb{N} : \lambda_k = \lambda\} \neq \emptyset$ et $x \in \mathrm{span}\{e_k : k \in \mathbb{N}\ ,\ \lambda_k = \lambda\}$.

L'argument est analogue lorsque la suite est finie. $\square$

4.8 Corollaire.

Si de plus X est de dimension infinie et $\overline{R(A)} = X$, alors la suite $(\lambda_1, e_1), (\lambda_2, e_2), \ldots$ donnée par le théorème 4.7 est infinie et $X = \overline{\mathrm{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}}$.

Démonstration. Par le point *(iv)* du théorème 4.7, $R(A) \subset \overline{\mathrm{span}\{e_1, e_2, \ldots\}}$, et donc $X = \overline{R(A)} \subset \overline{\mathrm{span}\{e_1, e_2, \ldots\}} \subset X$.
Comme X est supposé de dimension infinie, la suite $(\lambda_1, e_1), (\lambda_2, e_2), \ldots$ est infinie. $\square$

4.9 Suites orthonormées.

Dans un espace préhilbertien $(X, < .,. >)$, une suite $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $< e_n, e_m >= \delta_{n,m}$ pour tout $n, m \in \mathbb{N}$ est dite **orthonormée**. Si de plus $X = \overline{\mathrm{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}}$, alors $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **orthonormée totale** (voir

par exemple le §4.8).
Un ensemble $E \subset X$ tel que $X = \overline{\text{span } E}$ et $< u, v >= \delta_{u,v}$, pour tout $u, v \in E$, est appelé **base orthonormée** de X.
Soit une suite orthonormée $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, alors :

1) **Inégalité de Bessel :**

$$\forall x \in X \ \forall n \in \mathbb{N} \ \sum_{k=1}^{n} | < x, e_k > |^2 \leq \|x\|^2;$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$ et $y \in \text{span}\{e_1, ..., e_n\}$ on a

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} < x, e_k > e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} | < x, e_k > |^2 \leq \|x - y\|^2;$$

3) Pour chaque $x \in X$ fixé, on a

$$x \in \overline{\text{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}} \Leftrightarrow x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} < x, e_k > e_k$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} | < x, e_k > |^2 = \|x\|^2$$ (cette dernière égalité est dite **égalité de Parseval**).

Démonstration. 1) et 2) Soit $z = \sum_{k=1}^{n} < x, e_k > e_k$. On a

$$< z, e_j >=< x, e_j > \text{ et } < x - z, e_j >= 0 \text{ pour } j = 1, ..., n,$$

et donc $< x - z, z >= 0$. D'où

$$\|x - z\|^2 =< x - z, x >= \|x\|^2 - < z, x >= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} | < x, e_k > |^2,$$

ce qui prouve l'égalité dans 2). On peut alors déduire l'inégalité de Bessel :

$$\sum_{k=1}^{n} | < x, e_k > |^2 = \|x\|^2 - \|x - z\|^2 \leq \|x\|^2.$$

Comme $z - y \in \text{span}\{e_1, ..., e_n\}$, on a $< x - z, z - y >= 0$ car $< x - z, e_j >= 0$ pour $j = 1, ..., n$. D'où

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= < (x - z) + (z - y), (x - z) + (z - y) > \\ &= \|x - z\|^2 + \|z - y\|^2 \geq \|x - z\|^2. \end{aligned}$$

3) Si $x \in \overline{\text{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}}$, alors il existe des suites $\{n_j\} \subset \mathbb{N}$ et $\{y_j\} \subset X$ telles que $y_j \in \text{span}\{e_1, \ldots, e_{n_j}\}$ pour tout $j \in \mathbb{N}$ et $\lim_{j\to\infty} \|y_j - x\| = 0$. Par 2), on a

$$\lim_{j\to\infty} \left\| x - \sum_{k=1}^{n_j} < x, e_k > e_k \right\| \leq \lim_{j\to\infty} \|x - y_j\| = 0.$$

Comme $||x - \sum_{k=1}^n < x, e_k > e_k||^2 = ||x||^2 - \sum_{k=1}^n | < x, e_k > |^2$ est décroissante en n, on en déduit que

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} < x, e_k > e_k \right\| = 0.$$

Réciproquement, si $x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n < x, e_k > e_k$, alors $x \in \overline{\text{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}}$. On a aussi

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} | < x, e_k > |^2 = \|x\|^2 \quad &\overset{2)}{\Leftrightarrow} \quad \lim_{n\to\infty} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} < x, e_k > e_k \right\|^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} < x, e_k > e_k. \end{aligned}$$

□

4.10 Théorème spectral (2^{nde} version).

Soient un espace hilbertien $(H, < .,. >)$ de dimension infinie et $A \in \mathcal{L}(H)$ symétrique, compact et tel que le sous-espace $(N(A), < .,. >)$ est séparable. Alors il existe une suite orthonormée totale $\{f_n\}_{n\geq 1}$ de H faite de vecteurs propres de A et telle que la suite $\{\mu_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ des valeurs propres correspondantes satisfait $\lim_{n\to\infty} \mu_n = 0$. De plus $Ax = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \mu_k < x, f_k > f_k$ pour tout $x \in H$.

Démonstration. Pour se fixer les idées, supposons $R(A)$ et $N(A)$ de dimension infinie et soit la suite $\{(\lambda_n, e_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par le théorème 4.7. Pour $x \in H$, nous savons par Bessel que $\sum_{k=1}^n | < x, e_k > |^2 \leq \|x\|^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par l'exercice 4 de la série 7, $\{\sum_{k=1}^n < x, e_k > e_k\}_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy qui converge donc vers un certain $y \in H$ (par la complétude de H). Or

$$A(x-y) = Ax - Ay \overset{\S 4.7}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k < x, e_k > e_k - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} < x, e_k > Ae_k = 0$$

puisque $Ae_k = \lambda_k e_k$, et donc $x - y \in N(A)$.
L'hypothèse de séparabilité assure (cf exercice 5 de la série 7) qu'il existe une suite orthonormée totale $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $(N(A), < .,. >)$, et donc $x - y = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} < x - y, g_k > g_k$ (cf §4.9). Comme $Ag_j = 0$, le point (ii) du paragraphe 4.4 nous donne $< e_k, g_j >= 0$ pour tout $k, j \geq 1$ et donc $< y, g_j >= 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. D'où $x - y = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} < x, g_k > g_k$.
Posons $f_{2n-1} := e_n$, $f_{2n} := g_n$, $\mu_{2n-1} = \lambda_n$ et $\mu_{2n} = 0$. Alors

$$\begin{aligned} x &= y + (x - y) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (< x, e_k > e_k + < x, g_k > g_k) \\ &= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} < x, f_k > f_k \end{aligned}$$

(la suite $\{f_n\}$ est bien orthonormée totale), et

$$Ax = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} < x, f_k > Af_k = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \mu_k < x, f_k > f_k.$$

□

4.11 Terminologie.

Un opérateur linéaire, borné, symétrique et défini sur un espace hilbertien est aussi appelé **borné et autoadjoint**.

4.12 Valeurs régulières, ensemble résolvant, spectre.

Soit un espace de Banach $(X, \|.\|)$ et $T \in \mathcal{L}(X)$. Si $\lambda \in \mathbb{F}$ est telle que $T - \lambda I$ admet un inverse dans $\mathcal{L}(X)$, λ est dite **valeur régulière** de T. L'ensemble $\rho(T)$ des valeurs régulières est appelé l'**ensemble résolvant** de T. L'ensemble $\sigma(T) := \mathbb{F} \setminus \rho(T)$ est appelé le **spectre** de T.

4.13 Remarque

Chaque valeur propre λ de T appartient à $\sigma(T)$ vu que $T - \lambda I$ n'est pas injective.

4.14 Proposition.

Soit un espace de Banach $(X, \|.\|)$ et $T \in \mathcal{L}(X)$. Alors $\sigma(T)$ est fermé, borné et $|\lambda| \leq \|T\|$ pour tout $\lambda \in \sigma(T)$.

Démonstration. Montrons que $\rho(T)$ est ouvert. Soit $\lambda \in \rho(T)$. Pour $\mu \in \mathbb{F}$, nous avons $\|(T - \mu I) - (T - \lambda I)\| \leq |\mu - \lambda|$. Par le théorème 3.10, $T - \mu I$ est inversible dans $\mathcal{L}(X)$ si $|\mu - \lambda|$ est assez petit. Ainsi $\rho(T)$ est ouvert.
Supposons que $|\lambda| > \|T\|$ et montrons que $\lambda \in \rho(T)$. Nous avons $T - \lambda I = -\lambda(I - (1/\lambda)T)$ et $\|(1/\lambda)T\| < 1$. Par le théorème 3.9, $I - (1/\lambda)T$ est inversible dans $\mathcal{L}(X)$ et donc $\lambda \in \rho(T)$. $\square$

Chapitre 5

Espaces duaux et théorème de Hahn-Banach

5.1 Espaces dual et bidual.

Soit un evn X. L'**espace dual** de X, noté X^*, est défini par $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{F})$ (espace vectoriel des fonctionnelles linéaires bornées).
Comme l'evn $(\mathbb{F}, |.|)$ est complet, X^* est un espace de Banach (par le théorème 3.8). La norme sur X^* est donnée par

$$\|f\|_{X^*} := \sup\{|f(x)| : x \in X,\ \|x\|_X \leq 1\}.$$

Le **bidual** de X, noté par X^{**}, est le dual de X^* : $X^{**} = (X^*)^*$.

Remarques :

- Nous sommes intéressés par le dual **topologique**, c'est-à-dire que X^* est constitué de fonctionnelles linéaires **continues**.

- On appelle aussi X^* l'**espace conjugué** de X.

5.2 Espaces congruents.

Deux evn X et Y sur $\mathbb{F}$ sont dit **congruents** s'il existe un opérateur linéaire bijectif $T : X \to Y$ tel que

$$\|Tx\|_Y = \|x\|_X,\ \ \forall x \in X.$$

T est appelé une **congruence**.

5.3 Théorème.

Pour $1 \leq p < \infty$, $(l^p_{\mathbb{F}})^*$ est congruent à $l^q_{\mathbb{F}}$, où $1/p + 1/q = 1$.

Démonstration. 1ère partie : Lors de cette première partie nous allons définir un opérateur linéaire injectif $T : l^q \to (l^p)^*$ et prouver l'inégalité $\|T\alpha\|_{(l^p)^*} \leq \|\alpha\|_q$ pour tout $\alpha \in l^q$.
Pour cela, définissons pour $\alpha \in l^q$ la fonctionnelle $T\alpha \in (l^p)^*$ donnée par

$$(T\alpha)\xi := \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k \xi_k$$

pour tout $\xi \in l^p$. Par l'inégalité de Hölder, $\sum_{k\in\mathbb{N}} |\alpha_k||\xi_k| \leq \|\alpha\|_q \|\xi\|_p < \infty$ et $(T\alpha)\xi$ est donc bien défini. Clairement $T\alpha : l^p \to \mathbb{F}$ est une fonctionnelle linéaire et bornée vu que, pour tout $\xi \in l^p$, nous avons

$$|(T\alpha)\xi| \leq \|\alpha\|_q \|\xi\|_p,$$

la norme satisfaisant ainsi $\|T\alpha\|_{(l^p)^*} \leq \|\alpha\|_q$. Observons que $T : l^q \to (l^p)^*$ est linéaire et injectif. Pour vérifier l'injectivité, remarquons que si $\alpha \neq \widetilde{\alpha}$ dans l^q, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha_k \neq \widetilde{\alpha}_k$ et donc $(T\alpha)e_k \neq (T\widetilde{\alpha})e_k$ et ainsi $T\alpha \neq T\widetilde{\alpha}$, où $e_k = (\delta_{k,n})_{n\in\mathbb{N}} \in l^p$.

2ème partie : Nous allons maintenant prouver la surjectivité de T ainsi que l'inégalité $\|T\alpha\|_{(l^p)^*} \geq \|\alpha\|_q$ pour tout $\alpha \in l^q$.
Considérons pour cela un $f \in (l^p)^*$ et définissons $\alpha = (\alpha_k) \subset \mathbb{F}$ par $\alpha_k = f(e_k)$. Vérifions que $\alpha \in l^q$ et $\|\alpha\|_q \leq \|f\|_{(l^p)^*}$.

(a) $p = 1$: Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|\alpha_k| = |f(e_k)| \leq \|f\|_{(l^1)^*} \|e_k\|_1 = \|f\|_{(l^1)^*}$. D'où $\alpha \in l^\infty$ et $\|\alpha\|_\infty \leq \|f\|_{(l^1)^*}$.

(b) $1 < p < \infty$: Soit $\xi^{(n)} \subset \mathbb{F}$ défini par

$$\xi_k^{(n)} = \begin{cases} 0 \text{ si } \alpha_k = 0 \text{ ou } k > n \\ \frac{|\alpha_k|^q}{\alpha_k} \text{ si } \alpha_k \neq 0 \text{ et } k \leq n. \end{cases}$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^q &= \sum_{k=1}^n \alpha_k \xi_k^{(n)} = \sum_{k=1}^n f(e_k)\xi_k^{(n)} = f(\xi^{(n)}) \leq \|f\|_{(l^p)^*} \|\xi^{(n)}\|_p \\ &= \|f\|_{(l^p)^*} \left(\sum_{k=1}^n |\alpha_k|^{(q-1)p} \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{(l^p)^*} \left(\sum_{k=1}^n |\alpha_k|^q \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

et donc $(\sum_{k=1}^n |\alpha_k|^q)^{1-1/p} \leq \|f\|_{(l^p)^*}$. En laissant n tendre vers l'infini, nous déduisons que $\alpha \in l^q$ et $\|\alpha\|_q \leq \|f\|_{(l^p)^*}$.
Il reste à voir que $T\alpha = f$. Comme $1 \leq p < \infty$,

$$\forall \xi \in l^p \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \xi_k e_k = \xi$$

dans l^p (cf série 3, exo 1, où nous avons vu que $\{e_k\}_{k\geq 1}$ est une base de Schauder de l^p pour $1 \leq p < \infty$). Nous en déduisons pour tout $\xi \in l^p$

$$\begin{aligned} f(\xi) &= f\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k\right) = \lim_{n\to\infty} f\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\xi_k = (T\alpha)\xi, \end{aligned}$$

ce qui achève cette preuve. □

5.4 Remarques.

(a) l^1 et $(l^\infty)^*$ ne sont pas congruents (cf séries d'exercices).

(b) Pour $1 \leq p < \infty$ et $-\infty \leq a < b \leq \infty$, on montre que $(L^p_{\mathbb{F}}(a,b))^*$ est congruent à $L^q_{\mathbb{F}}(a,b)$, où $1/p + 1/q = 1$.

5.5 Ensembles partiellement/totalement ordonnés, majorant et élément maximal.

Un **ensemble partiellement ordonné** $(P, \prec)$ consiste en un ensemble $P \neq \emptyset$ et en un ordre partiel $\prec$, c'est-à-dire une relation telle que

- $x \prec x$ (réfléxivité) ;
- $x \prec y$ et $y \prec x \Rightarrow x = y$ (antisymétrie) ;
- $x \prec y$ et $y \prec z \Rightarrow x \prec z$ (transitivité).

Un **ensemble totalement ordonné** $(T, \prec)$ est un ensemble partiellement ordonné avec la propriété additionnelle

$$\forall (x,y) \in T^2 \quad (x \prec y \text{ ou } y \prec x).$$

Un **majorant** d'un sous-ensemble W d'un ensemble partiellement ordonné $(P, \prec)$ est un élément $z \in P$ tel que $x \prec z$ pour tout $x \in W$.
Un **élément maximal** d'un ensemble partiellement ordonné P est un élément $m \in P$ tel que $m \prec x \Rightarrow m = x$.

5.6 Remarques.

(a) Si l'ordre n'est pas total, un élément maximal de $(P, \prec)$ n'est pas nécessairement un majorant de P.

(b) Si $(P, \prec)$ est un ensemble partiellement ordonné et $\emptyset \neq Q \subset P$, alors Q est aussi un ensemble partiellement ordonné.

5.7 Lemme de Zorn.

Soit un ensemble partiellement ordonné $(P, \prec)$ tel que tout sous-ensemble totalement ordonné $T \subset P$ admet un majorant $z_T \in P$ (c'est-à-dire $x \prec z_T$ pour tout $x \in T$). Alors P a au moins un élément maximal.

Démonstration. La preuve s'appuie sur l'axiome du choix. En fait le lemme de Zorn et l'axiome du choix sont équivalents. $\square$

5.8 Fonctionnelle sous-linéaire.

Soit un espace vectoriel X sur $\mathbb{F}$. Une **fonctionnelle sous-linéaire** $p : X \to \mathbb{R}$ est, par définition, sous-additive :

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y), \ \ \forall x, y \in X,$$

et positivement homogène :

$$p(\alpha x) = \alpha p(x), \ \ \forall x \in X, \ \ \forall \alpha \in [0, \infty[.$$

5.9 Exemples.

(a) Dans un evn $(X, \|.\|)$, $p(x) = \|x\|$ définit une fonctionnelle sous-linéaire.

(b) Dans $X = l^\infty_{\mathbb{R}}$, l'application

$$l^\infty_{\mathbb{R}} \ni x \mapsto p(x) := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \in \mathbb{R}$$

est une fonctionnelle sous-linéaire.
Notons que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $p(x) = \limsup_{n\to\infty} (n-m+1)^{-1} \sum_{k=m}^{n} x_k \in [\inf_{k\geq m} x_k, \sup_{k\geq m} x_k]$ et donc $\liminf_{n\to\infty} x_n \leq p(x) \leq \limsup_{n\to\infty} x_n$.

5.10 Le théorème d'extension de Hahn-Banach pour des fonctionnelles sous-linéaires.

Soit un espace vectoriel réel V et une fonctionnelle sous-linéaire $p : V \to \mathbb{R}$. Supposons que $D(f) \subset V$ soit un sous-espace vectoriel et que $f : D(f) \to \mathbb{R}$ soit une fonctionnelle linéaire (= application linéaire).

Si $f(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in D(f)$, alors il existe une fonctionnelle linéaire $F : V \to \mathbb{R}$ telle que

$$F|_{D(f)} = f \quad \text{et} \quad F(x) \leq p(x) \ \forall x \in V.$$

Démonstration. $1^{\text{ère}}$ partie : Nous allons dans cette première partie appliquer le lemme de Zorn. Considérons pour cela l'ensemble

$$\begin{aligned} P \ &:= \ \{g : D(g) \to \mathbb{R} \mid D(g) \text{ est un sous-ev de } V,\ g \text{ est linéaire,} \\ &\qquad D(f) \subset D(g),\ g|_{D(f)} = f \text{ et } g(x) \leq p(x) \text{ sur } D(g)\ \} \end{aligned}$$

et définissons l'ordre partiel $\prec$ sur P par

$$g \prec h \quad \text{si} \quad D(g) \subset D(h) \quad \text{et} \quad h|_{D(g)} = g.$$

Notons que $P \neq \emptyset$ puisque $f \in P$.
Pour tout sous-ensemble totalement ordonné $T \subset P$, on définit $\hat{g} : D(\hat{g}) \to \mathbb{R}$ par $D(\hat{g}) = \cup_{g \in T} D(g)$ et $\hat{g}(x) = g(x)$ si $x \in D(g)$ et $g \in T$. Il est facile de vérifier que $\hat{g} \in P$ et que $g \prec \hat{g}$ pour tout $g \in T$.
Ainsi $\hat{g}$ est un majorant de T, et par le lemme de Zorn, il existe un élément maximal $F \in P$.

$2^{\text{ème}}$ partie : Prouvons maintenant que $D(F) = V$.
Par contradiction, supposons qu'il existe un $z \in V \setminus D(F)$. Pour $c \in \mathbb{R}$, définissons $\hat{F} : D(\hat{F}) \to \mathbb{R}$ par

$$D(\hat{F}) = D(F) \oplus \operatorname{span}\{z\} \quad \text{et} \quad \hat{F}(x + \lambda z) = F(x) + \lambda c,$$

pour tout $x \in D(F)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Peut-on choisir $c \in \mathbb{R}$ tel que $\hat{F}(u) \leq p(u)$ sur $D(\hat{F})$? Observons que

$$\begin{aligned} & \hat{F}(u) \leq p(u) \quad \text{pour tout } u \in D(\hat{F}) \\ \Leftrightarrow \quad & F(x) + \lambda c \leq p(x + \lambda z) \quad \text{pour tout } x \in D(F) \text{ et } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \underset{x=|\lambda| y}{\Leftrightarrow} \quad & F(y) + \frac{\lambda}{|\lambda|} c \leq p\left(y + \frac{\lambda}{|\lambda|} z\right) \quad \text{pour tout } y \in D(F) \text{ et } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \Leftrightarrow \quad & F(y) + c \leq p(y + z) \text{ et } F(y) - c \leq p(y - z) \quad \text{pour tout } y \in D(F) \\ \Leftrightarrow \quad & \sup_{y \in D(F)} \{F(y) - p(y - z)\} \leq c \leq \inf_{y \in D(F)} \{p(y + z) - F(y)\}. \end{aligned}$$

Une telle valeur de $c \in \mathbb{R}$ existe si $F(y_1) - p(y_1 - z) \leq p(y_2 + z) - F(y_2)$ pour tout $y_1, y_2 \in D(F)$. Mais ceci est vrai car

$$\begin{aligned} F(y_1) + F(y_2) \ &= \ F(y_1 + y_2) \underset{y_1 + y_2 \in D(F)}{\leq} p(y_1 + y_2) \\ &= \ p((y_1 - z) + (y_2 + z)) \underset{\text{sous-additivité}}{\leq} p(y_1 - z) + p(y_2 + z) \end{aligned}$$

pour tout $y_1, y_2 \in D(F)$.
Ceci montre que, pour un tel choix de $c \in \mathbb{R}$, $\hat{F} \in P$, $F \prec \hat{F}$ et $F \neq \hat{F}$, contredisant la maximalité de F. $\square$

5.11 Théorème : existence d'une limite de Banach.

Rappelons qu'une **limite de Banach** $F : l^\infty_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ est une application linéaire telle que :

- $\liminf_{n\to\infty} x_n \leq F(x) \leq \limsup_{n\to\infty} x_n$ pour tout $x \in l^\infty_{\mathbb{R}}$;
- $F(x) = F(Sx)$ pour tout $x = (x_1, x_2, ...) \in l^\infty_{\mathbb{R}}$, où $Sx = (x_2, x_3, ...)$.

Théorème : Un tel F existe.

Démonstration. Soient $V = l^\infty_{\mathbb{R}}$, $D(f) = \{x \in l^\infty_{\mathbb{R}} : x \text{ converge }\}$, $f(x) := \lim_{n\to\infty} x_n$ pour tout $x \in D(f)$, et

$$p(x) := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$$

pour tout $x \in V$ (c'est l'exemple 5.9(b)). Remarquons que, pour $x \in D(f)$,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k = p(x).$$

Soit $F : l^\infty_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ donné par le théorème 5.10. Alors F est linéaire et

$$F(x) \leq p(x) \leq \limsup_{n\to\infty} x_n$$

pour tout $x \in l^\infty_{\mathbb{R}}$. De plus

$$F(x) = -F(-x) \geq -\limsup_{n\to\infty}(-x_n) = \liminf_{n\to\infty} x_n$$

pour tout $x \in l^\infty_{\mathbb{R}}$. Il reste à vérifier que $F(x) = F(Sx)$ pour tout $x \in l^\infty_{\mathbb{R}}$. On a

$$\begin{aligned} F(x - Sx) &\leq p(x - Sx) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k+1}) \\ &= \limsup_{n\to\infty} \frac{x_1 - x_{n+1}}{n} = 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} F(x - Sx) &= -F(Sx - x) \geq -p(Sx - x) = -\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_{k+1} - x_k) \\ &= -\limsup_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_1}{n} = 0. \end{aligned}$$

D'où $F(x - Sx) = 0$ et $F(x) = F(Sx)$ pour tout $x \in l^\infty_{\mathbb{R}}$. $\square$

5.12 Le théorème d'extension de Hahn-Banach pour des fonctionnelles linéaires bornées.

Soit un evn $(X, \|.\|)$ sur $\mathbb{F}$, un sous-espace vectoriel $D(f) \subset X$ et une fonctionnelle linéaire $f : D(f) \to \mathbb{F}$ que l'on suppose bornée :

$$\|f\|_{D(f)^*} := \sup\{|f(x)| : x \in D(f) \text{ et } \|x\| \leq 1\} < \infty.$$

Alors il existe $F \in X^*$ tel que $F|_{D(f)} = f$ et $\|F\|_{X^*} = \|f\|_{D(f)^*}$.

Démonstration. Nous écrirons $\|f\|$ et $\|F\|$ à la place de $\|f\|_{D(f)^*}$ et $\|F\|_{X^*}$.

(i) $\underline{\mathbb{F} = \mathbb{R}}$: Définissons $p(x) := \|f\| \, \|x\|$ pour tout $x \in X$. Alors p est une fonctionnelle sous-linéaire sur X telle que

$$f(x) \leq |f(x)| \leq \|f\| \, \|x\| = p(x), \ \ \forall x \in D(f).$$

En appliquant le théorème 5.10 à f, $V = X$ et p, on obtient une extension linéaire F de f définie sur X et telle que

$$F(x) \leq p(x) = \|f\| \, \|x\|, \ \ \forall x \in X.$$

Comme $F(x) = -F(-x) \geq -p(-x) = -\|f\| \, \|-x\| = -\|f\| \, \|x\|$, nous avons aussi $|F(x)| \leq \|f\| \, \|x\|$ pour tout $x \in X$. D'où $F \in X^*$ et $\|F\| \leq \|f\|$. D'autre part

$$\begin{aligned} \|f\| &= \sup\{|F(x)| : x \in D(f) \text{ et } \|x\| \leq 1\} \\ &\leq \sup\{|F(x)| : x \in X \text{ et } \|x\| \leq 1\} = \|F\|. \end{aligned}$$

(ii) $\underline{\mathbb{F} = \mathbb{C}}$: Pour $x \in D(f)$, écrivons

$$f(x) = f_1(x) + i f_2(x) \text{ avec } f_1(x) = \mathrm{Re}(f(x)) \text{ et } f_2(x) = \mathrm{Im}(f(x)).$$

Remarquons que $f_1 : D(f) \to \mathbb{R}$ est $\mathbb{R}$-linéaire et $f_1(x) \leq |f(x)| \leq \|f\|\|x\|$ pour tout $x \in D(f)$. En appliquant le théorème 5.10 à f_1, $V = X$ vu comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $p(x) := \|f\| \, \|x\|$, on obtient une extension $\mathbb{R}$-linéaire $F_1 : X \to \mathbb{R}$ de f_1 telle que $F_1(x) \leq p(x) = \|f\| \, \|x\|$ pour tout $x \in X$.

Pour $x \in D(f)$, nous avons

$$f_2(x) = \mathrm{Im}(f(x)) = \mathrm{Re}(-i f(x)) = -\mathrm{Re}(f(ix)) = -f_1(ix).$$

Ceci conduit à la définition suivante :

$$F(x) := F_1(x) - i F_1(ix) \ \ \forall x \in X.$$

Clairement $F : X \to \mathbb{C}$ est une extension $\mathbb{R}$-linéaire de f. La $\mathbb{C}$-linéarité de F est une conséquence de

$$F(ix) = F_1(ix) - i F_1(-x) = i(F_1(x) - i F_1(ix)) = i F(x)$$

pour tout $x \in X$. Finalement, pour tout $x \in X$ tel que $F(x) \neq 0$,

$$\begin{aligned}
|F(x)| &= |F(x)|\, F\left(\frac{x}{F(x)}\right) = |F(x)|\, F_1\left(\frac{x}{F(x)}\right) \\
&\leq |F(x)|\, \|f\| \left\| \frac{x}{F(x)} \right\| = \|f\|\, \|x\|,
\end{aligned}$$

et donc $F \in X^*$ avec $\|F\| \leq \|f\|$. D'autre part

$$\begin{aligned}
\|f\| &= \sup\{|F(x)| : x \in D(f) \text{ et } \|x\| \leq 1\} \\
&\leq \sup\{|F(x)| : x \in X \text{ et } \|x\| \leq 1\} = \|F\|
\end{aligned}$$

et ainsi $\|f\| = \|F\|$. □

5.13 Théorème.

Soient un evn $(X, \|.\|)$ sur $\mathbb{F}$, un sous-espace vectoriel fermé $L \subset X$ et $x_0 \in X \setminus L$. Alors il existe $F \in X^*$ tel que $F(x_0) = 1$ et $F|_L = 0$.

Démonstration. Définissons $M = L \oplus \operatorname{span}\{x_0\}$ et $f : M \to \mathbb{F}$ par $f(u + \lambda x_0) := \lambda$ pour tout $u \in L$ et $\lambda \in \mathbb{F}$. Clairement f est linéaire. Prouvons que f est bornée. Par contradiction, supposons qu'il existe une suite $\{u_n + \lambda_n x_0\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n \in L$, $\|u_n + \lambda_n x_0\| \leq 1$ et $|\lambda_n| \to \infty$. Alors

$$\|\lambda_n^{-1} u_n + x_0\| = |\lambda_n|^{-1} \|u_n + \lambda_n x_0\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

et $\lim_{n\to\infty}(-\lambda_n^{-1} u_n) = x_0$. Comme L est fermé, on obtient la contradiction que $x_0 \in L$. Ainsi f est bornée. Par le théorème 5.12, f admet une extension $F \in X^*$. Clairement $F(x_0) = f(x_0) = 1$ et $F|_L = f|_L = 0$. □

5.14 Proposition.

Soient un evn $(X, \|.\|)$ sur $\mathbb{F}$ et $x_0 \in X \setminus \{0\}$. Alors il existe $F \in X^*$ tel que $F(x_0) = \|x_0\|$ et $\|F\| = 1$.

Démonstration. Définissons $f : \operatorname{span}\{x_0\} \to \mathbb{F}$ par $f(\lambda x_0) = \lambda \|x_0\|$. Comme

$$\forall \lambda \in \mathbb{F} \quad |f(\lambda x_0)| = |\lambda|\, \|x_0\| = \|\lambda x_0\|,$$

nous avons

$$\sup\{|f(x)| : x \in \operatorname{span}\{x_0\} \text{ et } \|x\| \leq 1\} = \sup\{\|x\| : x \in \operatorname{span}\{x_0\} \text{ et } \|x\| \leq 1\} = 1.$$

Par le théorème 5.12, f admet une extension $F \in X^*$ telle que $\|F\| = 1$. Clairement $F(x_0) = f(x_0) = \|x_0\|$. □

5.15 Proposition.

Soit un evn $(X, \|.\|)$. Pour tout $x_0 \in X$, nous avons

$$\|x_0\| = \max_{\substack{f \in X^* \\ \|f\| \leq 1}} |f(x_0)|.$$

Démonstration. Si $x_0 = 0$, c'est évident. Si $x_0 \neq 0$, nous avons

$$|f(x_0)| \leq \|f\| \|x_0\| \leq \|x_0\|$$

pour tout $f \in X^*$ telle que $\|f\| \leq 1$, et donc $\|x_0\| \geq \sup_{f \in X^*,\ \|f\| \leq 1} |f(x_0)|$. Soit F donné par la proposition 5.14. Alors $\|F\| = 1$ et $F(x_0) = \|x_0\|$, d'où $\|x_0\| = \max_{f \in X^*,\ \|f\| \leq 1} |f(x_0)|$. □

5.16 L'injection canonique.

Soit un evn $(X, \|.\|)$. L'application $J : X \to X^{**}$ donnée par

$$(Jx)(f) := f(x)$$

pour tout $x \in X$ et $f \in X^*$ est l'**injection canonique** de X dans X^{**}.
Remarques. Il est facile de vérifier que, pour tout $x \in X$, $Jx : X^* \to \mathbb{F}$ est effectivement linéaire. De plus, pour tout $x \in X$, $Jx : X^* \to \mathbb{F}$ est bornée car

$$|(Jx)(f)| = |f(x)| \leq ||f||\,||x|| \quad \forall f \in X^* \ .$$

Le fait que J est injective résulte du fait que J est isométrique, comme l'affirme le théorème qui suit.

5.17 Théorème.

L'injection canonique J est linéaire et isométrique. Ainsi X et $J(X)$ sont congruents.

Démonstration. Pour tout $x, y \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ et $f \in X^*$, nous avons

$$\begin{aligned} (J(\alpha x + \beta y))(f) &= f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \\ &= \alpha (Jx)(f) + \beta (Jy)(f), \end{aligned}$$

et donc $J(\alpha x + \beta y) = \alpha Jx + \beta Jy$. De plus

$$\begin{aligned} \|Jx\| &= \sup\{|(Jx)(f)| : f \in X^*,\ \|f\| \leq 1\} \\ &= \sup\{|f(x)| : f \in X^*,\ \|f\| \leq 1\} \\ &= \|x\| \end{aligned}$$

par la proposition 5.15. □

5.18 Espaces vectoriels normés réflexifs.

Un evn X est dit **réflexif** si l'injection canonique $J : X \to X^{**}$ est surjective.

Remarque : Dans ce cas X est nécessairement complet puisque $X^{**} = \mathcal{L}(X^*, \mathbb{F})$ l'est.

5.19 Exemples.

1) Pour $1 < p < \infty$ et $-\infty \leq a < b \leq \infty$, l^p et $L^p(a, b)$ sont réflexifs ;

2) Tout espace hilbertien est réflexif ;

3) l^1 n'est pas réflexif.

Cf série 11.

5.20 Convergence faible et convergence forte.

Dans un evn X, on dit que la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ **converge faiblement** vers x si $f(x_n) \to f(x)$ pour tout $f \in X^*$. On dit alors que x est la **limite faible** de $\{x_n\}$.

Notations : $x_n \overset{wk}{\to} x$ ou $x_n \rightharpoonup x$ (wk signifie "weak").

Par contraste, la convergence (ie $\|x_n - x\| \to 0$ lorsque $n \to \infty$) est parfois appelée **convergence forte** ou **en norme**.

5.21 Proposition.

1) Si $x_n \to x$, alors $x_n \overset{wk}{\to} x$;

2) Si $x_n \overset{wk}{\to} x$ et $x_n \overset{wk}{\to} y$, alors $x = y$;

3) Dans un espace hilbertien H, $x_n \overset{wk}{\to} x$ ssi $< x_n, z > \to < x, z >$ pour tout $z \in H$;

4) Dans l^2, les vecteurs $e_n := (\delta_{n,j})_{j\in\mathbb{N}}$ satisfont $e_n \overset{wk}{\to} 0$, mais $e_n \nrightarrow 0$.

Remarque : Dans $\mathbb{F}^k$ muni de n'importe quelle norme, la convergence faible implique la convergence de chaque composante, et donc la convergence en norme.

Démonstration. 1) Si $x_n \to x$, alors $f(x_n) \to f(x)$ pour tout $f \in X^*$ par continuité de f ;

2) Par l'absurde, supposons que $x \neq y$. Par la proposition 5.14, il existe un $F \in X^*$ tel que $F(x-y) = \|x-y\|$ et $\|F\| = 1$. Comme $x_n \overset{wk}{\to} x$ et $x_n \overset{wk}{\to} y$,

$$\|x-y\| = F(x-y) = F(x) - F(y) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) - \lim_{n\to\infty} F(x_n) = 0,$$

et donc $x = y$, ce qui est une contradiction.

3) Résulte du théorème de représentation de Riesz (série 10) ;

4) Pour tout $\xi = (\xi_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l^2$, on a

$$\lim_{n\to\infty} < e_n, \xi >= \lim_{n\to\infty} \overline{\xi_n} = 0,$$

(si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, on peut omettre le conjugué complexe) et donc $e_n \overset{wk}{\to} 0$. Comme $\|e_n\| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_n \nrightarrow 0$. □

5.22 Convergence faible*.

Dans un evn X, on dit que la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X^*$ **converge faiblement*** vers $f \in X^*$ si $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in X$. On dit alors que f est la **limite faible***, et on note $f_n \overset{wk*}{\to} f$ ou $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$.

Remarques :

- $f_n \overset{wk}{\to} f$ signifie que $\phi(f_n) \to \phi(f)$ pour tout $\phi \in X^{**}$ (appliquer la définition 5.20 à l'evn X^*).

- Si X est réflexif, alors $f_n \overset{wk}{\to} f$ ssi $f_n \overset{wk*}{\to} f$. En effet, soit l'injection canonique $J : X \to X^{**}$. Alors

$$\begin{aligned} f_n \overset{wk}{\to} f &\Leftrightarrow \forall x \in X,\ (Jx)(f_n) \to (Jx)(f) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in X,\ f_n(x) \to f(x) \\ &\Leftrightarrow f_n \overset{wk*}{\to} f. \end{aligned}$$

- En général, $f_n \overset{wk}{\to} f$ implique $f_n \overset{wk*}{\to} f$.

5.23 Théorème.

Soient un evn X et $\{f_n\} \subset X^*$. Si X est séparable et $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\| < \infty$, alors $\{f_n\}$ admet une sous-suite convergeant faiblement*.

Démonstration. Soit un sous-ensemble dense dénombrable $D = \{x_p : p \in \mathbb{N}\} \subset X$. La suite $\{f_n(x_1)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{F}$ car

$$|f_n(x_1)| \leq \|f_n\|\|x_1\| \leq \|x_1\| \sup_{k\in\mathbb{N}} \|f_k\|.$$

Il existe donc une sous-suite $\{f_{1,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\{f_{1,n}(x_1)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{F}$. De même, il existe une sous-suite $\{f_{2,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\{f_{1,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\{f_{2,n}(x_2)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{F}$.
En répétant ce procédé, on obtient des sous-suites $\{f_{p,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

1) $\{f_{p,n}(x_p)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{F}$;

2) $\{f_{p+1,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $\{f_{p,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$.

La sous-suite diagonale $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} := \{f_{n,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ est telle que, pour chaque $p \in \mathbb{N}$, $\{g_n\}_{n\geq p}$ est une sous-suite de $\{f_{p,n}\}_{n\geq p}$ et donc $\{g_n(x_p)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{F}$. Pour $x \in X$ fixé, $\{g_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. En effet, soit $\epsilon > 0$. Alors il existe $z \in D$ tel que

$$\|z - x\| < \frac{\epsilon/3}{1 + \sup_{k\in\mathbb{N}} \|f_k\|}$$

et $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$|g_m(z) - g_n(z)| < \frac{\epsilon}{3}, \quad \forall m, n \geq N$$

(puisque $\{g_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge). D'où

$$\begin{aligned} |g_m(x) - g_n(x)| &\leq |g_m(x) - g_m(z)| + |g_m(z) - g_n(z)| + |g_n(z) - g_n(x)| \\ &< \|g_m\|\|z - x\| + \frac{\epsilon}{3} + \|g_n\|\|z - x\| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon, \end{aligned}$$

pour tout $m, n \geq N$. Ainsi, pour tout $x \in X$, $\{g_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Notons la limite $g(x) \in \mathbb{F}$. Clairement $g : X \to \mathbb{F}$ est linéaire et

$$\begin{aligned} \sup_{\|x\|\leq 1} |g(x)| &= \sup_{\|x\|\leq 1} \left|\lim_{n\to\infty} g_n(x)\right| \\ &\leq \sup_{\|x\|\leq 1} \sup_{n\in\mathbb{N}} |g_n(x)| \\ &\leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \|f_k\| < \infty. \end{aligned}$$

D'où $g \in X^*$ et $g_n \overset{wk*}{\to} g$. □

5.24 Théorème.

Soit un espace de Banach $(B, ||.||)$ et une suite $\{x_n\} \subset B$. Si B est réflexif et $\{x_n\}$ est bornée, alors $\{x_n\}$ admet une sous-suite convergeant faiblement dans B.

Démonstration. Soit $X = \overline{\text{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$ muni de la même norme $||.||$. Nous noterons par $J : X \to X^{**}$ l'injection canonique.

1^ère^ partie : vérification que $(X, ||.||)$ est réflexif.

Observons d'abord que, si $f \in B^*$, alors la fonctionnelle linéaire $f|_X$ est bornée :

$$||f|_X|| = \sup\{|f(x)| : x \in X, ||x|| \leq 1\} \leq \sup\{|f(x)| : x \in B, ||x|| \leq 1\} = ||f||.$$

De plus cette inégalité prouve que l'application linéaire $f \to f|_X$ de B^* dans X^* est bornée.

Il s'agit de montrer que J est surjectif. Soit $\phi \in X^{**} = \mathcal{L}(X^*, \mathbb{F})$. Par ce qui précède, l'application linéaire $f \to \phi(f|_X)$ de B^* dans $\mathbb{F}$ est bornée, en tant que composée d'applications linéaires bornées. Comme B est supposé réflexif, il existe $x \in B$ tel que

$$\forall f \in B^* \quad \phi(f|_X) = f(x). \qquad (\star)$$

Prouvons par l'absurde que $x \in X$: si ce n'était pas le cas, le §5.13 assurerait l'existence de $F \in B^*$ tel que $F(x) = 1$ et $F|_X = 0$ (car X est fermé dans B), ce qui conduirait à l'absurdité $1 = F(x) \overset{(\star)}{=} \phi(F|_X) = 0$. Soit maintenant $g \in X^*$. Alors le §5.12 assure que g admet une extension $G \in B^*$. D'où $\phi(g) = \phi(G|_X) \overset{(\star)}{=} G(x) = G|_X(x) = g(x) = (Jx)(g)$. Ceci étant valable pour tout $g \in X^*$, on a prouvé que $\phi = Jx$. Ainsi J est surjectif et X est réflexif.

2^ème^ partie : séparabilité.

X est séparable. En effet, si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{F}$=$\mathbb{C}$), les combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{Q}$ (resp. $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$) de tout nombre fini d'éléments de la suite $\{x_n\}$ constituent un ensemble dénombrable et dense dans X.

Comme $J : X \to X^{**}$ est une congruence, X^{**} est aussi séparable. L'exercice 4 de la série 11 assure alors que X^* est séparable.

3^ème^ partie : conclusion.

Comme J est isométrique, $\{Jx_n\}$ est bornée dans $X^{**} = \mathcal{L}(X^*, \mathbb{F})$. D'après le §5.23 appliqué à l'evn séparable X^*, il existe une sous-suite $\{x_{n_k}\}$ telle que $Jx_{n_k} \overset{wk*}{\to} \phi$ pour un certain $\phi \in X^{**}$. Par la première partie, il existe $x \in X$ tel que $\phi = Jx$. Comme vu dans la première partie, si $f \in B^*$, alors $f|_X \in X^*$ et donc

$$f(x_{n_k}) = f|_X(x_{n_k}) = (Jx_{n_k})(f|_X) \to \phi(f|_X) = (Jx)(f|_X) = f|_X(x) = f(x).$$

Ceci étant valable pour tout $f \in B^*$, on a montré que $x_{n_k} \overset{wk}{\to} x$ dans B.

$\square$

Chapitre 6

Conséquences du théorème de Baire

6.1 Théorème de Baire.

Soit un espace métrique complet (M, d) et une suite $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'ouverts denses dans M : $\overline{U_n} = M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (cf série 2). Alors $\cap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ est un ensemble dense dans M.

Remarque : $\cap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ peut ne pas être ouvert.

Démonstration. Voir le cours "Espaces métriques et topologiques". □

6.2 Ensembles maigres.

Soit un espace métrique (M, d). Un sous-ensemble $A \subset M$ est dit **maigre** ou de **première catégorie** si $M \setminus A$ contient l'intersection d'une famille dénombrable d'ouverts denses. Ceci équivaut à dire que A est contenu dans l'union d'une famille dénombrable de fermés dont aucun ne contient de boules. Si A **n'est pas maigre**, on dit aussi qu'il est de **seconde catégorie**. Si (M, d) est complet, le théorème de Baire implique que M n'est pas maigre.

6.3 Théorème de la borne uniforme de Banach-Steinhaus.

Soient des evn X et Y sur $\mathbb{F}$, $Z \subset X$ et $\Gamma \subset \mathcal{L}(X, Y)$. Si Z n'est pas maigre et si, pour tout $z \in Z$, $\sup\{\|Tz\| : T \in \Gamma\} < \infty$, alors $\sup\{\|T\| : T \in \Gamma\} < \infty$.

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble

$$D_n := \{x \in X : \sup_{T\in\Gamma} \|Tx\| \leq n\} = \cap_{T\in\Gamma}\{x \in X : \|Tx\| \leq n\}$$

est fermé. De plus $Z \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} D_n$. Comme Z n'est pas maigre, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que D_n contient $B(\hat{x}, \epsilon)$ pour certains $\hat{x} \in X$ et $\epsilon > 0$. D'où

$$\|x - \hat{x}\| \leq \epsilon/2 \Rightarrow \sup\{\|Tx\| : T \in \Gamma\} \leq n,$$

et donc

$$\begin{aligned}
& \sup\{\|Tu\| : T \in \Gamma,\ \|u\| \leq 1\} \\
= & \sup\left\{\left\|T\left(\frac{x-\hat{x}}{\epsilon/2}\right)\right\| : T \in \Gamma,\ \|x - \hat{x}\| \leq \epsilon/2\right\} \\
\leq & \frac{2}{\epsilon}\sup\{\|Tx\| + \|T\hat{x}\| : T \in \Gamma,\ \|x - \hat{x}\| \leq \epsilon/2\} \\
\leq & \frac{2}{\epsilon}(\sup\{\|T\hat{x}\| : T \in \Gamma\} + \sup\{\|Tx\| : T \in \Gamma,\ \|x - \hat{x}\| \leq \epsilon/2\}) \\
\leq & \frac{4n}{\epsilon}.
\end{aligned}$$

Ceci montre que $\sup_{T\in\Gamma} \|T\| \leq 4n/\epsilon < \infty$. □

6.4 Remarque.

Si X est complet, on peut choisir $Z = X$ dans le théorème 6.3 (cf §2).

6.5 Convergence ponctuelle, convergence forte et limite forte.

Soient des evn X et Y sur $\mathbb{F}$, et $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(X, Y)$. Si $\{T_n x\} \subset Y$ converge pour tout $x \in A \subset X$, on dit que la suite $\{T_n\}$ **converge ponctuellement** sur A. Si la suite $\{T_n\}$ converge ponctuellement sur X, on dit qu'elle **converge fortement**. Dans ce cas, on peut définir $Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x$ pour tout $x \in X$. Alors $T : X \to Y$ est un opérateur linéaire, mais pas forcément borné. Il s'appelle la **limite forte** de $\{T_n\}$. Si $\|T_n - T\| \to 0$ pour un certain $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, on dit que $\{T_n\}$ converge (uniformément) vers T.

Remarque : La terminologie “convergence forte” a déjà été utilisée, mais dans un sens différent, au paragraphe 5.20.

6.6 Exemple.

Soient $X = l^1$, $Y = \mathbb{F}$ (c'est-à-dire que $\mathcal{L}(X, Y) = (l^1)^*$), et

$$T_n\xi := \xi_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et } \xi \in l^1.$$

Alors $\lim_{n\to\infty} T_n\xi = 0$ pour tout $\xi \in l^1$ et $\|T_n\| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement, mais pas uniformément, vers $0 \in \mathcal{L}(X, Y)$.

6.7 Théorème.

Soient des espaces de Banach X et Y sur $\mathbb{F}$, et $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(X,Y)$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

(1) $\{T_n\}$ converge fortement ;

(2) $\{T_n\}$ converge fortement vers un certain $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ et $\|T\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|$;

(3) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$ et il existe un sous-ensemble dense $D \subset X$ tel que $\{T_n\}$ converge ponctuellement sur D.

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ (2) : Le principe de la borne uniforme nous assure que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$. Posons $Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x$ pour tout $x \in X$, ce qui définit une application $T : X \to Y$ qui est clairement linéaire. De plus, pour tout $x \in X$ tel que $\|x\| \leq 1$,

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \|\lim_{n\to\infty} T_n x\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| \leq \liminf_{n\to\infty}(\|T_n\|\|x\|) \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|. \end{aligned}$$

Ainsi $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ et $\|T\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|$.

(2) $\Rightarrow$ (3) : Par le principe de la borne uniforme, $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$ et on peut choisir $D = X$.

(3) $\Rightarrow$ (1) : Soient $x \in X$ et $\epsilon > 0$. Pour $m, n \in \mathbb{N}$ et $z \in D$, on a

$$\begin{aligned} \|T_m x - T_n x\| &\leq \|T_m x - T_m z\| + \|T_m z - T_n z\| + \|T_n z - T_n x\| \\ &\leq \|T_m\|\|x - z\| + \|T_m z - T_n z\| + \|T_n\|\|z - x\|. \end{aligned}$$

Choisissons $z \in D$ tel que

$$\|z - x\| < \frac{\epsilon/3}{1 + \sup_{k\in\mathbb{N}} \|T_k\|},$$

et $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|T_m z - T_n z\| < \epsilon/3$ pour tout $m, n \geq N$ (possible car $\{T_n z\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge et est donc de Cauchy). D'où

$$\|T_m x - T_n x\| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

pour tout $m, n \geq N$. Ceci montre que $\{T_n x\}_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et donc converge dans l'espace de Banach Y. □

6.8 Rappel.

Soit un evn X sur $\mathbb{F}$. On dit que la suite $\{\varphi_n\} \subset X^*$ converge faiblement* vers $\varphi \in X^*$ si $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ pour tout $x \in X$.
On note alors $\varphi_n \overset{wk*}{\to} \varphi$ ou $\varphi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi$.

6.9 Théorème.

Pour un espace de Banach X et une suite $\{\varphi_n\} \subset X^*$, les affirmations suivantes sont équivalentes :

(1) $\{\varphi_n(x)\}$ converge dans $\mathbb{F}$ pour tout $x \in X$;

(2) Il existe $\varphi \in X^*$ telle que $\varphi_n \overset{wk*}{\to} \varphi$ et $\|\varphi\|_{X^*} \leq \liminf_{n\to\infty} \|\varphi_n\|_{X^*}$;

(3) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\varphi_n\|_{X^*} < \infty$ et il existe un sous-ensemble dense $D \subset X$ tel que $\{\varphi_n(x)\}$ converge pour tout $x \in D$.

Démonstration. Découle du théorème 6.7. □

6.10 Exemple : intégration numérique.

Soient $-\infty < a = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < ... < t_n^{(n)} = b < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $u \in C([a,b],\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$, considérons l'algorithme d'intégration numérique suivant :

$$\int_a^b u(t)dt = \varphi_n(u) + r_n(u),$$

où $\varphi_n(u) = \sum_{k=0}^n c_k^{(n)} u(t_k^{(n)})$. Les $c_k^{(n)} \in \mathbb{R}$ sont des coefficients indépendants de u, et $r_n(u)$ est le reste. Les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

(a) $\lim_{n\to\infty} r_n(u) = 0 \ \ \forall u \in C([a,b],\mathbb{R})$;

(b) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^n |c_k^{(n)}| < \infty$ et $\lim_{n\to\infty} r_n(p) = 0$ pour tout polynôme $p \in C([a,b],\mathbb{R})$.

Démonstration. Posons $X = C([a,b],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ et vérifions que $\varphi_n \in X^*$ avec $\|\varphi_n\| = \sum_{k=0}^n |c_k^{(n)}|$.
Pour tout $u \in X$, $|\varphi_n(u)| \leq \sum_{k=0}^n |c_k^{(n)}| \|u\|_\infty$ et donc $\varphi_n \in X^*$ avec $\|\varphi_n\| \leq \sum_{k=0}^n |c_k^{(n)}|$.
En choisissant pour u la fonction continue $w_n : [a,b] \to [-1,1]$ affine sur

chaque intervalle $[t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)}]$ ($k \in \{0, \ldots, n-1\}$) et telle que $w_n(t_k^{(n)}) = \mathrm{sgn}(c_k^{(n)}) \in \{-1, 0, 1\}$ (pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$), on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} |c_k^{(n)}| = \varphi_n(w_n) \leq \|\varphi_n\| \|w_n\|_\infty \leq \|\varphi_n\|,$$

et donc $\|\varphi_n\| = \sum_{k=0}^{n} |c_k^{(n)}|$.

$\underline{(a) \Rightarrow (b)}$: Découle du principe de la borne uniforme (§6.3 avec $Y = \mathbb{R}$) ;

$\underline{(b) \Rightarrow (a)}$: Comme le point (3) du paragraphe 6.9 est vrai (grâce au théorème d'approximation de Weierstrass), le point (2) de ce même paragraphe affirme qu'il existe un $\varphi \in X^*$ tel que $\varphi_n \overset{wk*}{\to} \varphi$. Pour tout polynôme $p \in C([a,b], \mathbb{R})$, on obtient

$$\varphi(p) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(p) = \int_a^b p(t)dt - \lim_{n\to\infty} r_n(p) \overset{(b)}{=} \int_a^b p(t)dt.$$

D'autre part, la fonctionnelle linéaire $u \to \int_a^b u(t)dt$, définie pour tout $u \in X$, est bornée et donc continue. Par densité, $\varphi(u) = \int_a^b u(t)dt$ et donc $\lim_{n\to\infty} r_n(u) = 0$ pour tout $u \in X$. □

6.11 Le théorème de l'application ouverte.

Soient des espaces de Banach X et Y sur $\mathbb{F}$, et soit $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ surjectif. Alors l'image par T de tout ouvert U dans X est un ouvert dans Y.

La preuve s'appuie sur le résultat suivant.

6.12 Théorème préliminaire.

Soient X, Y et T comme ci-dessus. Alors il existe $c > 0$ tel que $B_Y(0, c) \subset T(B_X(0, 1))$.

Démonstration. **Première partie** : preuve qu'il existe $c > 0$ tel que $B_Y(0, 2c) \subset \overline{T(B_X(0,1))}$.

Par la surjectivité de T, $Y = \cup_{n\in\mathbb{N}} T(B_X(0,n))$ et donc $Y = \cup_{n\in\mathbb{N}} \overline{T(B_X(0,n))}$. Comme Y est complet, il n'est pas maigre (théorème de Baire, cf § 6.2) et il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $\overline{T(B_X(0,n))}$ contient une certaine boule $B_Y(y, 4cn)$ avec $y \in Y$ et $c > 0$. D'où

$$\begin{aligned} B_Y(0, 4cn) &= \{z - y : z \in B_Y(y, 4cn)\} \\ &\subset \{z_1 - z_2 : z_1, z_2 \in B_Y(y, 4cn)\} \\ &\subset \{z_1 - z_2 : z_1, z_2 \in \overline{T(B_X(0,n))}\} \\ &\subset \overline{\{z_1 - z_2 : z_1, z_2 \in T(B_X(0,n))\}} \subset \overline{T(B_X(0,2n))}, \end{aligned}$$

et $B_Y(0,2c) \subset \overline{T(B_X(0,1))}$, par homogénéité de la norme.

Seconde partie : preuve que $B_Y(0,c) \subset T(B_X(0,1))$.

Par homogénéité de la norme, pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $B_Y(0,2^{-n}c) \subset \overline{T(B_X(0,2^{-n-1}))}$ et donc

$$\forall y \in B_Y(0,2^{-n}c),\ \exists x \in B_X(0,2^{-n-1}) \text{ tel que } \|y - Tx\| < 2^{-n-1}c. \quad (P_n)$$

Choisissons $y_0 \in B_Y(0,c)$ quelconque et trouvons $\hat{x} \in B_X(0,1)$ tel que $T\hat{x} = y_0$. En appliquant (P_0), on obtient qu'il existe un $x_0 \in B_X(0,1/2)$ tel que $\|y_0 - Tx_0\| < c/2$. Posons $y_1 = y_0 - Tx_0$. En appliquant (P_1), il existe un $x_1 \in B_X(0,1/4)$ tel que $\|y_1 - Tx_1\| < c/4$. Posons $y_2 = y_1 - Tx_1$.
En continuant de cette manière, nous obtenons deux suites $\{x_n\}_{n\geq 0} \subset X$ et $\{y_n\}_{n\geq 0} \subset Y$ telles que

$$y_{n+1} = y_n - Tx_n\ ,\ \|x_n\| < 2^{-n-1} \text{ et } \|y_n\| < 2^{-n}c \ \ (\forall n \geq 0).$$

Vérifions que $\{\sum_{k=0}^{n} x_k\}_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy. Pour $\epsilon > 0$, soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $2^{-N-1} < \epsilon$. Pour tout $m > n \geq N$, on a bien

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=0}^{m} x_k - \sum_{k=0}^{n} x_k \right\| &= \left\| \sum_{k=n+1}^{m} x_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|x_k\| \\
&< \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k-1} = 2^{-n-2} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \\
&= 2^{-n-1} \leq 2^{-N-1} < \epsilon.
\end{aligned}$$

Comme X est complet, $\{\sum_{k=0}^{n} x_k\}_{n\geq 0}$ converge vers un certain $\hat{x}$. Nous obtenons

$$\begin{aligned}
T\hat{x} &= \lim_{n\to\infty} T \sum_{k=0}^{n} x_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (y_k - y_{k+1}) \\
&= \lim_{n\to\infty} (y_0 - y_{n+1}) = y_0
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|\hat{x}\| &= \lim_{n\to\infty} \| \sum_{k=0}^{n} x_k \| \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \|x_k\| \\
&< \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k-1} = 1.
\end{aligned}$$

$\square$

Suite du § 6.11 : preuve du théorème de l'application ouverte.

Démonstration. Soit un ouvert $U \subset X$. Choisissons $y_0 \in T(U)$ quelconque et $x_0 \in U$ tel que $Tx_0 = y_0$. Comme U est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B_X(x_0, r) \subset U$. Par le théorème 6.12, il existe un $c > 0$ tel que $B_Y(0, cr) \subset T(B_X(0, r))$ et donc

$$\begin{aligned} B_Y(y_0, rc) &= \{y_0 + y : y \in B_Y(0, rc)\} \subset \{Tx_0 + Tx : x \in B_X(0, r)\} \\ &= T(B_X(x_0, r)) \subset T(U). \end{aligned}$$

Ceci montre que $T(U)$ est ouvert. □

Remarque : Si $(X, \mathcal{T})$ et $(X', \mathcal{T}')$ sont des espaces topologiques, $f : X \to X'$ est dit **ouverte** si $f(U) \in \mathcal{T}'$ pour tout $U \in \mathcal{T}$.

6.13 Théorème de l'inverse borné.

Soient des espaces de Banach X et Y sur $\mathbb{F}$, et soit $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ bijectif. Alors $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.

Démonstration. Clairement, $S := T^{-1} : Y \to X$ est linéaire. Il est continu car, pour tout ouvert U dans X,

$$S^{-1}(U) = T(U)$$

est ouvert dans Y d'après le théorème 6.11. □

6.14 Corollaire.

Soient des normes $||\cdot||_1$ et $||\cdot||_2$ sur un espace vectoriel $X \neq \{0\}$, telles que $(X, ||\cdot||_1)$ et $(X, ||\cdot||_2)$ sont des espaces de Banach.

S'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall x \in X \ ||x||_2 \le C||x||_1 \ ,$$

alors il existe $D > 0$ tel que

$$\forall x \in X \ ||x||_1 \le D||x||_2 \ .$$

Ainsi les normes $||\cdot||_1$ et $||\cdot||_2$ sont équivalentes.

Démonstration. Définissons T de $(X, ||\cdot||_1)$ dans $(X, ||\cdot||_2)$ par $Tx = x$ pour tout $x \in X$. Clairement T est une bijection. De plus

$$||Tx||_2 = ||x||_2 \le C||x||_1 \text{ pour tout } x \in X,$$

ce qui montre que T est borné. Par le Théorème de l'Inverse Borné, T^{-1} est borné de $(X, ||\cdot||_2)$ dans $(X, ||\cdot||_1)$. Pour tout $x \in X$, on obtient

$$||x||_1 = ||T^{-1}x||_1 \leq ||T^{-1}|| \, ||x||_2$$

et on peut donc choisir $D = ||T^{-1}||$. Comme $T^{-1} \neq 0$, $D > 0$. $\square$

6.15 Graphe d'un opérateur.

Soient des espaces vectoriels X et Y sur $\mathbb{F}$, et un opérateur linéaire $T : X \to Y$. Le **graphe** de T est défini par

$$G(T) = \{(x, y) \in X \times Y : y = Tx\}.$$

6.16 Evn produit.

Soient des evn X et Y sur $\mathbb{F}$. Le **produit cartésien** $X \times Y$ muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire de la manière suivante est un espace vectoriel :

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad , \quad \alpha(x, y) := (\alpha x, \alpha y).$$

Nous munissons $X \times Y$ de la norme $\|.\|_{X\times Y}$ définie par

$$\|(x, y)\|_{X\times Y} := \|x\|_X + \|y\|_Y.$$

Si X et Y sont complets, alors $(X \times Y, \|.\|_{X\times Y})$ l'est aussi (le vérifier !).

6.17 Théorème du graphe fermé.

Soient des espaces de Banach X et Y sur $\mathbb{F}$, et soit un opérateur linéaire $T : X \to Y$. Alors $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ si et seulement si $G(T)$ est fermé dans $X \times Y$.

Démonstration. 1) Supposons tout d'abord que $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ et considérons une suite quelconque $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset G(T)$ qui converge vers $(x, y) \in X \times Y$, autrement dit $\|x_n - x\|_X + \|y_n - y\|_Y \to 0$. Ceci implique que $\|x_n - x\|_X \to 0$ et $\|y_n - y\|_Y \to 0$. Comme T est continu (cf §3.4) et $x_n \to x$ dans X, nous obtenons que

$$Tx = \lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} y_n = y,$$

et donc $(x, y) \in G(T)$. Ceci montre que $G(T)$ est fermé.

2) Supposons maintenant que $G(T)$ est fermé. Alors $(G(T), \|.\|_{X\times Y})$ est un espace de Banach (car $G(T)$ est fermé et $X \times Y$ est complet ; voir l'exercice

3 de la série 1). L'opérateur linéaire $P : G(T) \to X$ défini par $P(x, Tx) := x$ est borné :

$$\forall (x, Tx) \in G(T) \quad \|P(x, Tx)\|_X = \|x\|_X \leq \|x\|_X + \|Tx\|_Y = \|(x, Tx)\|_{X \times Y},$$

et bijectif. Par le théorème de l'inverse borné, il admet un inverse P^{-1} dans $\mathcal{L}(X, G(T))$. Nous obtenons alors, pour tout $x \in X$, que

$$\begin{aligned} \|Tx\|_Y &\leq \|x\|_X + \|Tx\|_Y = \|(x, Tx)\|_{X \times Y} \\ &= \|P^{-1}x\|_{X \times Y} \leq \|P^{-1}\| \|x\|_X, \end{aligned}$$

et donc $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. □

6.18 Définition : opérateur fermé.

Soient des evn X et Y sur $\mathbb{F}$, et un opérateur linéaire $T : X \to Y$. T est dit *fermé* si $G(T)$ est fermé dans l'evn $X \times Y$.

6.19 Définitions.

Soit un espace vectoriel X et soient des sous-espaces vectoriels Y et Z. Si chaque $x \in X$ s'écrit d'une manière unique

$$x = y + z \text{ avec } y \in Y \text{ et } z \in Z,$$

on dit que X est la *somme directe* de Y et Z, noté $X = Y \oplus Z$. Y est dit être un *complément* de Z et vice versa.

Si $X = Y \oplus Z$, les applications $P : X \to X$ et $Q : X \to X$ définies par

$$(x = y + z \text{ avec } y \in Y \text{ et } z \in Z) \Leftrightarrow (y = Px \text{ et } z = Qx)$$

sont linéaires. Elles sont appelées les *projections* sur Y et Z respectivement. Elles vérifient $I = P + Q$, où $I : X \to X$ est l'application identité. Comme $Py = y$ pour tout $y \in Y$, on obtient $P(Px) = Px$ pour tout $x \in X$ et donc $P^2 = P$. On dit que P est *idempotent* (Q l'est aussi).

D'une manière plus générale, si Y et Z sont deux sous-espaces vectoriels quelconques de X, on définit le sous-espace vectoriel

$$Y + Z := \{y + z : y \in Y, z \in Z\}$$

(la *somme* de Y et Z).

6.20 Théorème.

Soit un espace de *Banach* X et soient deux sous-espaces vectoriels *fermés* Y et Z tels que $X = Y + Z$ (somme pas nécessairement directe). Alors il existe $\beta > 0$ tel que

$$\forall x \in X \ \exists y \in Y \ \exists z \in Z \ \ (x = y + z, \ ||y|| \leq \beta ||x|| \text{ et } ||z|| \leq \beta ||x||).$$

Démonstration. Notons la norme sur X par $||x||$, munissons Y et Z de la norme $||\cdot||$ et $Y \times Z$ de la norme $||(y,z)||_{Y\times Z} := ||y|| + ||z||$. Comme Y et Z sont fermés dans l'espace complet X, Y et Z sont des espaces de Banach, et $Y \times Z$ aussi.

Soit l'opérateur linéaire $T : Y \times Z \to X$ défini par $T(y,z) = y + z$. Il est borné car

$$||T(y,z)|| = ||y + z|| \leq ||y|| + ||z|| = ||(y,z)||_{Y\times Z}$$

Il est aussi surjectif car $X = Y + Z$. Par le §6.12, il existe $c > 0$ tel que $B_X(0,c) \subset T(B_{Y\times Z}(0,1))$. Ainsi, si $||x|| < c$, il existe $y \in Y$ et $z \in Z$ tels que $x = y + z$ et $||(y,z)||_{Y\times Z} = ||y|| + ||z|| < 1$. En particulier, si $||x|| = \frac{c}{2}$, il existe $y \in Y$ et $z \in Z$ tels que $x = y + z$ et $||y|| + ||z|| \leq \frac{2}{c}||x||$. Par homogénéïté,

$$\forall x \in X \ \exists y \in Y \ \exists z \in Z \Big(x = y + z \text{ et } ||y|| + ||z|| \leq \frac{2}{c}||x|| \Big).$$

On peut donc choisir $\beta = \frac{2}{c}$. □

6.21 Corollaire.

Soient X, Y et Z comme au §6.20. Si de plus $X = Y \oplus Z$, alors les projections $P : X \to X$ et $Q : X \to X$ correspondantes sur Y et Z sont bornées.

Démonstration. Soit $\beta > 0$ donné par le §6.20. Pour tout $x \in X$, le §6.20 assure qu'il existe $y \in Y$ et $z \in Z$ tels que $x = y + z$, $||y|| \leq \beta||x||$ et $||z|| \leq \beta||x||$. Comme $X = Y \oplus Z$, y et z sont uniques et valent Px et Qx respectivement. D'où $||Px|| \leq \beta||x||$ et $||Qx|| \leq \beta||x||$. Ainsi $P, Q \in \mathcal{L}(X)$ et $||P||, ||Q|| \leq \beta$. □

Bibliographie

1. E. Kreyszig, Introductary Functional Analysis with Applications, Wiley.
2. Elements of Functional Analysis, I. J. Maddox, Cambridge Univ. Press.
3. H. Brezis, Analyse fonctionnelle : théorie et applications, Dunod.
4. A. Friedman, Foundations of Modern Analysis, Dover Publications.
5. K. Yosida, Functional Analysis, Springer-Verlag.