Danger !

- Les espérances/variances/covariances/corrélations ne sont pas définies si les intégrales/sommes ne convergent pas
- Ceci est notamment le cas lorsque la distribution de X a des **queues lourdes** : la densité de X décroît trop lentement vers zéro, et X a une probabilité élevée de prendre des valeurs énormes.

Exemple

- Considérons la fonction de densité $f(x) = \alpha x^{-1-\alpha}$ sur $[1, \infty)$ et $f(x) = 0$ pour $x < 1$ (loi **Pareto**). Pour $r \in \mathbb{R}$ on a

$r=1$

$$\mathbb{E}(X^r) = \alpha \int_1^\infty x^{r-1-\alpha} dx = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha - r} & r < \alpha \\ \infty & r \geq \alpha \end{cases}$$

- En particulier, $\mathbb{E}(X) < \infty$ si et seulement si $\alpha > 1$, et $\mathrm{var}(X) < \infty$ si et seulement si $\alpha > 2$
- Pour α petit la densité tend lentement vers zéro

$r=2$

Espérance d'une variable aléatoire mixte

Théorème de l'espérance totale Pour une partition $A_1, A_2, \ldots$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_i \mathbb{E}(X|A_i)\mathrm{Pr}(A_i)$$

Exemple : pluie (diapositive 112) La probabilité qu'il pleuve pendant la journée est 0.2. S'il pleut, la quantité de pluie qui tombe suit une loi exponentielle de parametre $\lambda = 0.05\text{mm}^{-1}$. Trouver l'espérance de la quantité de pluie journalière.

$A = \{\text{"il pleut"}\}$

X = quantité de pluie

$$\mathbb{E}[X] = \underbrace{\mathbb{E}[X|A]}_{\mathbb{E}Z} \underbrace{\mathrm{Pr}(A)}_{0,2} + \underbrace{\mathbb{E}[X|A^c]}_{=0}\mathrm{Pr}(A^c)$$

Ex si $Z \sim \exp(\lambda)$, $\mathbb{E}[Z] = \frac{1}{\lambda}$. Donc $\mathbb{E}[X] = 20 \times 0,2 = 4$

Quantiles

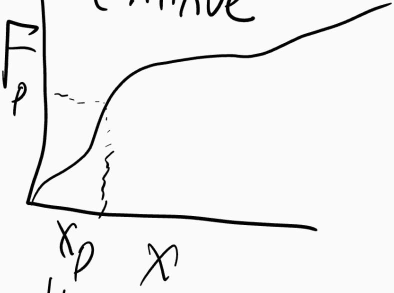
Définition: Soit $0 < p < 1$. On définit le $p$ième **quantile** d'une fonction de répartition F par

$$x_p = \inf\{x : F(x) \geq p\}$$

- Pour des variables aléatoires continues, $F(x_p) = p$, donc x_p est tel que $\Pr(X \leq x_p) = p$
- Pour la plupart des variables aléatoires continues, ceci implique que $\boxed{x_p = F^{-1}(p)}$, où F^{-1} est la fonction inverse de F
- "La plupart" : celles ayant une fonction de densité strictement positive (sur $\{x : 0 < F(x) < 1\}$)
- Pour des variables aléatoires discrètes la situation est plus complexe
- Les quantiles empiriques (diapositive 35) sont des estimations (cf les prochains cours) des quantiles à partir des données à disposition.

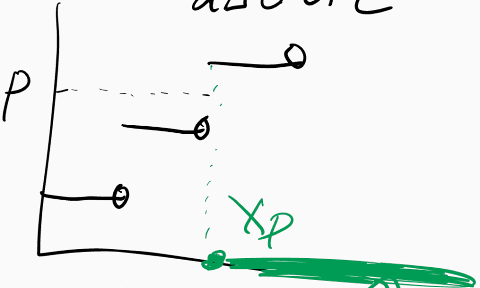
En particulier, on appelle le 0.5ème quantile la **médiane** de F

continue



$x_p = F^{-1}(p)$

discrète



Il n'y a pas de $x \in \mathbb{R}$ t.q. $F(x) = p$

$\{x : F(x) \geq p\}$

$x_p = \inf\{x : F(x) \geq p\}$

Exemple Calculer les quantiles des lois (a) $U(a,b)$, (b) Pareto (diapositive 141)

(a) $F(x) = \frac{x-a}{b-a}$ $a<x<b$

continue. Donc $p = F(x_p) = \frac{x_p - a}{b-a}$

$\Rightarrow \boxed{x_p = a + p(b-a)}$

(b) $F(x) = 1 - x^{-\alpha}$. Donc $p = F(x_p)$

$= 1 - x_p^{-\alpha} \Rightarrow x_p = (1-p)^{-\frac{1}{\alpha}}$

2.4 Théorèmes fondamentaux de probabilité

Approche expérimentale

- Considérons l'expérience de jeter une pièce de monnaie 10'000 fois et observons le nombre de "face" obtenues
- Soient $X_1, \ldots, X_n$ les variables aléatoires indépendantes

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{si le } i\text{ème jet donne "face"}, \\ 0, & \text{si le } i\text{ème jet donne "pile"} \end{cases} \quad \sim B(1,p)$$

- Donc $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ représente le nombre de "face" sur n essais et

$$S_n \sim \mathcal{B}(n,p)$$

- La proportion de "face" sur n jets est $\overline{X}_n := S_n/n$ et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\overline{X}_n) &= n^{-1}\mathbb{E}(S_n) = n^{-1}\, np = p, \\ \mathrm{var}(\overline{X}_n) &= n^{-2}\mathrm{var}(S_n) = n^{-2}np(1-p) = p(1-p)/n \to 0 \end{aligned}$$

quand $n \to \infty$

- Donc $\overline{X}_n$ se concentre de plus en plus autour de p

Lois des grands nombres

Théorème (loi (faible) des grands nombres) Soient $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées d'espérance $\mu = \mathbb{E}(X_1)$ et variance $\sigma^2 = \mathrm{var}(X_1)$ finies. Alors pour tout $\epsilon > 0$

$\mu - \epsilon \quad \mu \quad \mu + \epsilon$

$\underbrace{\cdot \quad \bullet \quad \cdot}_{I}$

$pr(X \notin I)$

$$\Pr(|\overline{X}_n - \mu| \geq \epsilon) \to 0, \qquad n \to \infty. \tag{1}$$

***Théorème (loi forte des grands nombres)** Soient $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées d'espérance $\mu = \mathbb{E}(X_1)$ finie. Alors

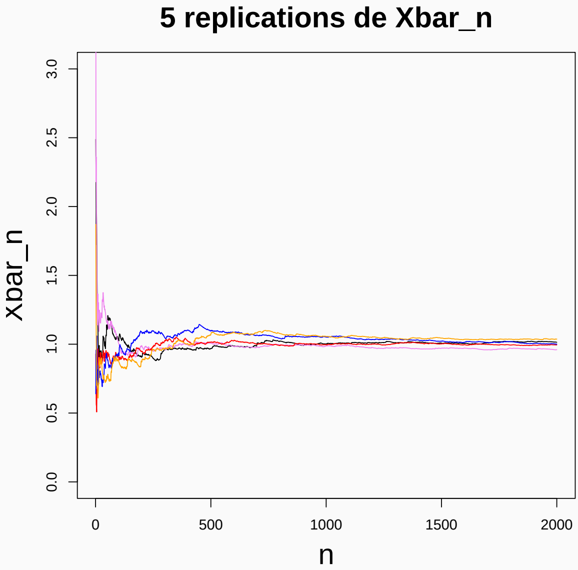
$$\Pr\left(\lim_{n\to\infty} \overline{X}_n = \mu\right) = 1 \tag{2}$$

*Il est donc certain que $\overline{X}_n$ soit proche de μ pour n grand

- *La loi forte est plus forte parce que (2) implique (1) et la variance peut être infinie
- *La loi faible utilise seulement $\mathrm{cov}(X_i, X_j) = 0$ pour $i \neq j$

Pour l'examen il suffit de connaître la loi faible

Illustration de la loi des grands nombres : exp(1)



Vitesse de convergence : Théorème central limite

- $\overline{X}_n \to \mu$ quand $n \to \infty$, mais à quelle vitesse ?
- Comme $\mathbb{E}(\overline{X}_n) = \mu$ et $\mathrm{var}(\overline{X}_n) = \sigma^2/n \in (0, \infty)$, pour tout n

$$Z_n := \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} = \sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}$$

a espérance 0 et variance 1, suggérant que la vitesse est $\sqrt{n}$

Théorème central limite Soient $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées d'espérance μ et variance $\sigma^2 \in (0, \infty)$. Alors $Z_n := \sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)/\sigma$ satisfait

$$\Pr(Z_n \leq x) \to \Phi(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

La convergence étant uniforme en x, on déduit

$$\Pr(\overline{X}_n \leq x) = \Pr(Z_n \leq \sqrt{n}(x - \mu)/\sigma) \approx \Phi(\sqrt{n}(x - \mu)/\sigma)$$

donc $\overline{X}_n$ suit **approximativement** une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$

Illustration avec des variables $\exp(1)$

On calcule $\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mathbb{E}(X_1))/\sqrt{\text{var}(X_1)}$, $R = 5000$ fois

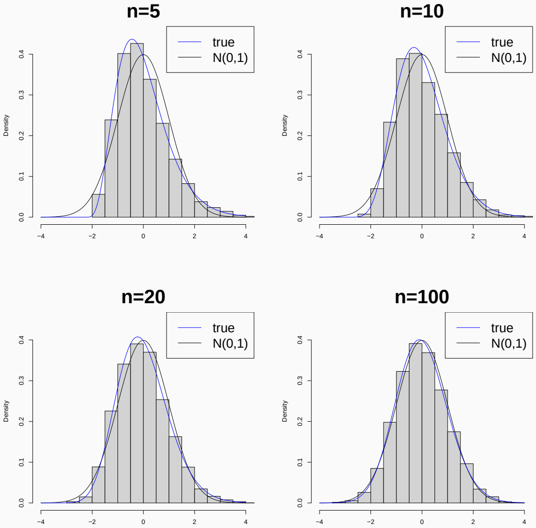


Illustration avec des variables $\exp(1)$

- On s'intéresse à la distribution de
$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mathbb{E}(X_1))}{\sqrt{\mathrm{var}(X_1)}}$$
- Fixons $n = 5$ ou 10 ou 20 ou 100 et $R = 5000$
- Générer $z_1^{(1)}, \ldots, z_n^{(1)} \overset{iid}{\sim} \exp(1)$, et calculer leur moyenne $\overline{z}^{(1)}$
- Générer $z_1^{(2)}, \ldots, z_n^{(2)} \overset{iid}{\sim} \exp(1)$, et calculer leur moyenne $\overline{z}^{(2)}$

$$\vdots$$

- Générer $z_1^{(R)}, \ldots, z_n^{(R)} \overset{iid}{\sim} \exp(1)$, et calculer leur moyenne $\overline{z}^{(R)}$
- Les R valeurs
$$\left(\frac{\sqrt{n}(\overline{z}^{(1)} - \mathbb{E}(X_1))}{\sqrt{\mathrm{var}(X_1)}}, \ldots, \frac{\sqrt{n}(\overline{z}^{(R)} - \mathbb{E}(X_1))}{\sqrt{\mathrm{var}(X_1)}} \right)$$
sont un échantillon issu de la distribution d'intérêt

Exemple Soit $X \sim \mathcal{B}(m, p)$. Donner une approximation de $\Pr(X \leq r)$, pour $r \in \mathbb{R}$.

150 $\Rightarrow \bar{Y}_m \overset{app}{\sim} \mathcal{N}\left(p, \frac{(1-p)}{m}\right) \Rightarrow X = m\bar{Y}_m \sim \mathcal{N}\left(mp, m^2 \frac{(1-p)}{m}\right)$

Solution Exemple 153 :

On a $X = \sum_{i=1}^{m} Y_i$, où $Y_1, \ldots, Y_m \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{B}(p)$. De plus, $\mathbb{E}(Y_1) = p$ et $\operatorname{Var}(Y_1) = p(1-p)$. Le TCL nous donne donc que $X \overset{\text{app}}{\sim} \mathcal{N}(mp, mp(1-p))$ pour m grand. Ainsi, si Z désigne une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, on a, pour m grand,

$$\Pr(X \leq r) = \Pr\left(\frac{X - mp}{\sqrt{mp(1-p)}} \leq \frac{r - mp}{\sqrt{mp(1-p)}}\right)$$
$$\approx \Pr\left(Z \leq \frac{r - mp}{\sqrt{mp(1-p)}}\right) = \Phi\left(\frac{r - mp}{\sqrt{mp(1-p)}}\right).$$

Utilisation du théorème central limite

- Le théorème central limite est utilisé pour approximer des probabilités impliquant des sommes de variables aléatoires indépendantes
- Sous les conditions précédentes, on a

$$\mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right) = n\mu, \quad \text{var}\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right) = n\sigma^2 \in (0, \infty)$$

- On **standardise** la somme

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} X_j - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} = \frac{n(\bar{X}_n - \mu)}{\sqrt{n\sigma^2}} = \frac{n^{1/2}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} = Z_n$$

- Par le théorème central limite Z_n est approximativement $\mathcal{N}(0,1)$ et donc

$$\Pr\left(\sum_{j=1}^{n} X_j \leq r\right) = \Pr\left\{\frac{\sum_{j=1}^{n} X_j - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq \frac{r - n\mu}{(n\sigma^2)^{1/2}}\right\} \approx \Phi\left\{\frac{r - n\mu}{(n\sigma^2)^{1/2}}\right\}.$$

Exemple Un livre de 640 pages a un nombre aléatoire d'erreurs sur chaque page. Si le nombre d'erreurs par page suit une loi de Poisson d'espérance $\lambda = 0.1$, et est indépendant des autres pages, quelle est la probabilité que le livre contienne moins de 50 erreurs ?

Exemple Un livre de 640 pages a un nombre d'erreurs aléatoires à chaque page. Si le nombre d'erreurs par page suit une loi de Poisson d'espérance $\lambda = 0.1$, et est indépendant des autres pages, quelle est la probabilité que le livre contienne moins de 50 erreurs ? $X_i = \#$erreurs à la page i

$X_1, \ldots, X_{640}$ indépendantes, $X_i \sim \text{Poiss}(0.1)$

$\mu = \mathbb{E}[X_i] = 0.1$, $\sigma^2 = \text{var}(X_i) = 0.1$, $n = 640$

$X = \sum_{i=1}^{640} X_i \overset{app}{\sim} N(n\mu, n\sigma^2) = N(64, 64)$

$\Pr(X \leq 50) = \Pr\left(\frac{X - 64}{\sqrt{64}} \leq \frac{50 - 64}{\sqrt{64}}\right) \approx \Phi\left(\frac{-14}{8}\right)$

$= 1 - \Phi(1.75) \approx 0.04$