

## Exemple Poisson

**Exemple** Pour  $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ , trouver  $\mathbb{E}(X)$  et  $\mathbb{E}\{X(X-1)\}$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{x e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{(x-1)!} \quad y=x-1 \\ &= \sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{y+1}}{y!} = \lambda \sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^y}{y!} = \lambda \sum_{y=0}^{\infty} f_Y(y) \quad Y \sim \text{Poisson}(\lambda) \\ &\quad \text{Variance } [\mathbb{E}[X] = \lambda] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) = x(x-1) \quad \mathbb{E}[X(X-1)] &= \mathbb{E}g(X) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x(x-1) e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \\ &\Rightarrow \sum_{x=2}^{\infty} \frac{x(x-1)}{x!} e^{-\lambda} \lambda^x = \sum_{x=2}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{(x-2)!} \quad y=x-2 \quad \sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{y+2}}{y!} \\ &\Rightarrow \lambda^2 \sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^y}{y!} = \lambda^2 \end{aligned}$$

## Exemple Poisson

**Exemple** Pour  $X \sim \text{Poiss}(\lambda)$ , trouver  $\mathbb{E}(X)$  et  $\mathbb{E}\{X(X-1)\}$ .

$$\sum_{x=2}^{\infty} \frac{x(x-1)e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} = \sum_{x=2}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{(x-2)!}$$

$$x! = (x-2)! (x-1)x$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{x(x-1)e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} = \sum_{x=2}^{\infty} \dots + \frac{\cancel{0(0-1)}e^{-\lambda} \lambda^0}{1!} + \frac{1(1-1)e^{-\lambda} \lambda^1}{1!}$$

## Exemples

**Exemple** Soit  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , trouver  $\mathbb{E}(X)$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (\mu + \sigma z) \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \sigma dz \\ &= \mu \int_{-\infty}^{\infty} \phi(z) dz + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ &= \mu \times 1 + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left( -e^{-\frac{z^2}{2}} \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} \\ &= \mu \end{aligned}$$

Handwritten notes:  
 $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$   
 $x = \mu + \sigma z$   
 $dx = \sigma dz$

# Mesure de dispersion

**Définition:** La **variance** d'une variable aléatoire  $X$  est définie comme

$$\text{var}(X) = \mathbb{E}[\{X - \mathbb{E}(X)\}^2] = \dots = \mathbb{E}(X^2) - \boxed{\mathbb{E}(X)^2}$$

**Propriétés :**

- Interprétation physique : variance  $\equiv$  moment d'inertie relatif au centre de masse
- $\text{var}(X) \geq 0$ , et  $\text{var}(X) = 0$  implique que  $X$  est constante
- la **déviations standard** de  $X$  est définie comme  $\text{sd}(X) = \sqrt{\text{var}(X)} \geq 0$
- si  $a, b$  sont des constantes, alors  $\text{var}(a + bX) = b^2 \text{var}(X)$
- si  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes et  $a, b_1, \dots, b_n$  des constantes, alors

$$\text{var}\left(a + \sum_{i=1}^n b_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n b_i^2 \text{var}(X_i)$$

**Exemple** Si  $X \sim \text{Pois}(\lambda)$ , montrer que  $\text{var}(X) = \lambda$ .

**Exemple** Si  $X \sim \mathcal{B}(m, p)$ , montrer que  $\text{var}(X) = m p(1 - p)$ .

**Exemple** Si  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , montrer que  $\text{var}(X) = \sigma^2$ .

## Exemples : variance

$$E[X] = \lambda \quad \text{---} \quad \text{var}(X) = E[X^2] - \lambda^2$$

**Exemple** Si  $X \sim \text{Poiss}(\lambda)$ , montrer que  $\text{var}(X) = \lambda$ .

$$\begin{aligned} E[X^2] &= E[X(X-1) + X] = E[X(X-1)] + E[X] \\ &= \lambda^2 + \lambda \rightarrow \text{var}(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda \end{aligned}$$

**Exemple** Si  $X \sim B(m, p)$ , montrer que  $\text{var}(X) = mp(1-p)$ .

$$X = \sum_{i=1}^m Y_i, \quad Y_i \sim B(p) \text{ indépendantes}$$

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= \sum_{i=1}^m \text{var}(Y_i) = \sum_{i=1}^m (E[Y_i^2] - (E[Y_i])^2) \\ &= \sum_{i=1}^m (p - p^2) = mp(1-p) \end{aligned}$$

# Exemple variance loi normale

**Exemple** Si  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , montrer que  $\text{var}(X) = \sigma^2$   $E[X] = \mu$

$$\text{var } X = E[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x - \mu)^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$dx = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$   
 $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$   
 $x = \mu + \sigma z$   
 $dx = \sigma dz$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{z}_{v(z)} \underbrace{z e^{-\frac{z^2}{2}}}_{u(z)} dz$$

$v(z) = z$   
 $u(z) = -e^{-\frac{z^2}{2}}$   
 $v'(z) = 1$

par parties

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left[ z(-e^{-\frac{z^2}{2}}) - \int_{-\infty}^{\infty} 1(-e^{-\frac{z^2}{2}}) dz \right]$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left[ 0 - \int_{-\infty}^{\infty} -e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right] = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \phi(z) dz = \sigma^2$$

# Covariance

**Définition:** La **covariance** des variables aléatoires  $X, Y$  est

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}[\{X - \mathbb{E}(X)\}\{Y - \mathbb{E}(Y)\}] = \dots = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

**Interprétation :** C'est une mesure de dépendance **linéaire** entre  $X$  et  $Y$

**Propriétés :**

- la covariance dépend des unités dont on mesure  $X, Y$
- $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$
- $\text{cov}(X, X) = \text{var}(X)$
- $\text{cov}(X + Y, Z + W) = \text{cov}(X, Z) + \text{cov}(Y, Z) + \text{cov}(X, W) + \text{cov}(Y, W)$
- si  $a, b, c, d$  sont des constantes, alors  
 $\text{cov}(aX + b, cY + d) = ac \text{cov}(X, Y)$
- $\text{var}(X \pm Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y) \pm 2\text{cov}(X, Y)$
- si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors  $\text{cov}(X, Y) = 0$ . Mais attention, l'inverse **n'est pas vraie** en général !

## Exemple

**Exemple** (voir diapositive 123) Soient  $X$  et  $Y$  de densité conjointe

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{si } 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver  $\text{Var}(X)$ ,  $\text{Var}(Y)$ , et  $\text{Cov}(X, Y)$ . Pour  $r, s \geq 0$ , on a

$$\begin{aligned} E[X^r Y^s] &= \int_0^1 \int_0^1 x^r y^s (x+y) dx dy \\ &= \int_0^1 \left( y^s \int_0^1 x^{r+1} dx + y^{s+1} \int_0^1 x^r dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \left( y^s \frac{1}{r+2} + y^{s+1} \frac{1}{r+1} \right) dy = \frac{1}{(s+1)(r+2)} + \frac{1}{(r+1)(s+2)} \end{aligned}$$

$$E[XY] \geq \frac{1}{(r+1)(s+2)} + \frac{1}{(s+1)(r+2)}$$

$$\forall r, s \geq 0$$

$$r=1, s=0 \quad E[X] = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$$

$$E[X^2] = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

$$\text{var}(X) = \frac{5}{12} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{11}{144}$$

De même  $E[Y] = \frac{7}{12}$ ,  $\text{var}(Y) = \frac{11}{144}$

$$r=1, s=1 \quad E[XY] = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{3} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{-1}{144}$$

# Corrélation

**Définition:** La **corrélation** de  $X$  et  $Y$  est

$$\rho_{X,Y} = \rho(X, Y) = \text{corr}(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var}(X)\text{var}(Y)}}$$

(zéro si une des variances est zéro).

**Propriétés :**

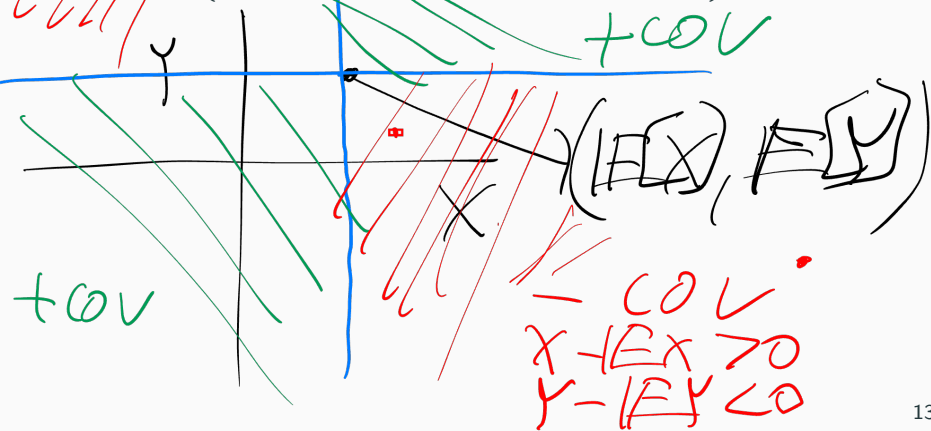
- $\rho_{X,Y}$  mesure la dépendance **linéaire** (et seulement linéaire!) entre  $X$  et  $Y$
- $\rho(a + bX, c + dY) = \text{sign}(bd)\rho(X, Y)$
- $\text{corr}(X, Y) = \text{corr}(Y, X)$
- $\text{corr}(X, X) = 1$  (si  $X$  n'est pas constante)
- $\text{corr}(X, -X) = -1$  (si  $X$  n'est pas constante)
- $-1 \leq \text{corr}(X, Y) \leq 1$  (inégalité de Cauchy-Schwarz)
- si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors  $\text{corr}(X, Y) = 0$ , mais la réciproque est faux!
- corrélation  $\neq$  causalité!

$$\begin{aligned} \text{corr} &= 1 \Leftrightarrow \\ Y &= a + bX \\ b &> 0 \end{aligned}$$

# Corrélation empirique

Version empirique (si  $\Pr((X = x_i, Y = y_i) = 1/n$  pour  $i = 1, \dots, n$ )

$$\frac{n^{-1} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y})}{\left\{ n^{-1} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2 \times n^{-1} \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^2 \right\}^{1/2}}$$



## Corrélation empirique

Version empirique (si  $\Pr((X = x_i, Y = y_i) = 1/n$  pour  $i = 1, \dots, n$ )

$$n^{-1} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y})$$

$= \text{COV}(\bar{X}, \bar{Y})$

$$\frac{\left\{ n^{-1} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2 \times n^{-1} \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^2 \right\}^{1/2}}$$

-COV  
-corr

Var X

Var Y

+COV  
+corr

