

Exemples

Exemple La quantité annuelle de pluie dans une certaine région est une variable aléatoire normale de moyenne $\mu = 140$ cm et de variance $\sigma^2 = 16$ cm². Quelle est la probabilité qu'il tombe entre 135 et 150 cm ?

$$\bar{X} \sim N(140, 16) \quad Z = \frac{\bar{X} - 140}{\sqrt{16}} \sim N(0, 1)$$

$$\begin{aligned} \Pr(135 \leq \bar{X} \leq 150) &= \Pr\left(\frac{135 - 140}{4} \leq \frac{\bar{X} - 140}{4} \leq \frac{150 - 140}{4}\right) \\ &= \Pr(-1.25 \leq Z \leq 2.5) \\ &= \Phi(2.5) - (1 - \Phi(1.25)) \approx 0.9938 - 0.8944 = 0.8882 \end{aligned}$$

2.2.3 Variables aléatoires conjointes

Variables aléatoires conjointes / simultanées

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même ensemble Ω . La **fonction de répartition conjointe (ou simultanée)** de X et Y est définie par

$$F_{X,Y}(x,y) = \Pr(X \leq x, Y \leq y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

$$F_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0,1]$$

- **Cas discret** (i.e., X et Y sont discrètes) : la loi de probabilité conjointe de X et Y est parfaitement déterminée si l'on connaît leur **fonction de masse conjointe**, i.e.,

$$f_{X,Y}(x_i, y_j) = \Pr(X = x_i, Y = y_j)$$

pour tous les couples (x_i, y_j) possibles.

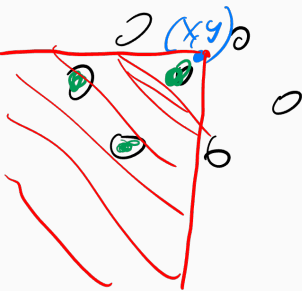
- **Cas continu** (i.e., X et Y sont continues) : la loi de probabilité conjointe de X et Y est parfaitement déterminée si l'on connaît leur **fonction de densité conjointe**, définie (si elle existe) par

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Cas discret : propriétés

- Propriétés de la fonction de masse conjointe :
 - $0 \leq f_{X,Y}(x_i, y_j) \leq 1, i, j = 1, 2, \dots$
 - $f_{X,Y}(x, y) = 0$, pour toutes les autres valeurs de x et y .
 - $\sum_{i,j} f_{X,Y}(x_i, y_j) = 1$.
- La fonction de répartition conjointe vérifie

$$F_{X,Y}(x, y) = \sum_{\{(i,j): x_i \leq x, y_j \leq y\}} f_{X,Y}(x_i, y_j), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$



Cas continu : propriétés

- Propriétés de la densité conjointe :

- $f_{X,Y}(x,y) \geq 0, \quad x,y \in \mathbb{R}.$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u,v)dvdu = 1.$

- La fonction de répartition conjointe vérifie

$$F_{X,Y}(x,y) = \Pr(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(u,v)dvdu, \quad x,y \in \mathbb{R}$$

- On a, pour tout $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ tels que $a_1 < b_1$ et $a_2 < b_2$,

$$\Pr(a_1 < X \leq b_1, a_2 < Y \leq b_2) = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f_{X,Y}(u,v)dvdu.$$

Lois marginales

Définition: Soient X, Y deux variables aléatoires ayant pour densité (ou fonction de masse) conjointe $f_{X,Y}$. Les **densités marginales** du couple (X, Y) sont respectivement les densités de X et Y , i.e., f_X et f_Y . De même, les **fonctions de répartition marginales** du couple (X, Y) sont respectivement les fonctions de répartition de X et Y , i.e., F_X et F_Y .

Dans le cas des densités, on a

- **cas discret** : $f_X(x_i) = \sum_j f_{X,Y}(x_i, y_j)$, $f_Y(y_j) = \sum_i f_{X,Y}(x_i, y_j)$;
- **cas continu** : $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy$, $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx$.

Concernant les fonctions de répartition, on a

- **cas discret** : $F_X(x) = \sum_{\{i: x_i \leq x\}} f_X(x_i)$, $F_Y(y) = \sum_{\{j: y_j \leq y\}} f_Y(y_j)$;
- **cas continu** : $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du$, $F_Y(y) = \int_{-\infty}^y f_Y(v) dv$.

Exemple X, Y prennent les valeurs $(1, 2), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (3, 4)$ avec probabilités égales. Trouver les lois marginales de X et de Y .

Solution 118 et 120

Exemple X, Y prennent les valeurs $(1, 2), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (3, 4)$ avec probabilités égales. Trouver les lois marginales de X et de Y .

Y				
4	•		•	
3			•	
2	•		•	
	X	1	2	3

$$f_X(1) = f_{X,Y}(1,2) + f_{X,Y}(1,4) = \frac{2}{5}$$

x_i	1	2	3
$f_X(x_i)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

y_i	2	3	4
$f_Y(y_i)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

Indépendance

Définition: Deux variables aléatoires X et Y sont **indépendantes** si

$$\Pr(X \leq x, Y \leq y) = \Pr(X \leq x) \times \Pr(Y \leq y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Dans ce cas on écrit $X \perp\!\!\!\perp Y$.

$$A = \{X \leq x\} \quad B = \{Y \leq y\}$$

$A \perp\!\!\!\perp B$

- Donc $X \perp\!\!\!\perp Y \iff \forall x, y \in \mathbb{R} : F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$
- si $X \perp\!\!\!\perp Y$ et f_X, f_Y sont connues, on peut obtenir $f_{X,Y}$. Ceci est **faux** pour des variables dépendantes
- si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $g(X) \perp\!\!\!\perp h(Y)$ pour toutes fonctions g, h 'raisonnables'
- Pour des variables aléatoires **discrètes** ou **continues**¹

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \times f_Y(y) \iff \forall x, y \in \mathbb{R} : F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \times F_Y(y)$$

Exemple Les variables aléatoires X, Y de l'exemple précédant sont-elles indépendantes ?

1. Pour des cas pathologiques, seulement \implies est vrai

Cas continu

La fonction de répartition conjointe est

$$\Pr(X \leq x, Y \leq y) = F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f_{X,Y}(u, v) du dv.$$

Propriétés :

- $f_{X,Y}(x, y) \geq 0$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u, v) du dv = 1$
- $f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x, y)}{\partial x \partial y}$
- $\Pr(a_1 < X \leq b_1, a_2 < Y \leq b_2) = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f_{X,Y}(u, v) du dv$
- Plus généralement, pour $A \subseteq \mathbb{R}^2$ 'raisonnable'

$$\Pr((X, Y) \in A) = \int_A f_{X,Y}(u, v) du dv$$

Exemple Soient $X \sim U[0, 1]$ et $Y \sim U[0, 2]$ indépendantes. Trouver $\Pr(X > Y)$.

Noter : $Y' = 2X \sim U[0, 2]$ mais $\Pr(X > Y') = 0$; X et Y' sont dépendantes !121

Solution 121

$$A = \{(x, y) : x > y\} \subseteq \mathbb{R}^2$$



$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{if } y \in [0, 2] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

A indep $\Rightarrow f_{X, Y}(x, y)$

$$= f_X(x) f_Y(y)$$

$$\int_A f_X(x) f_Y(y) dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{1}{2} dy \right) dx = \int_0^1 \frac{x}{2} dx = \boxed{\frac{1}{4}}$$

Densité conditionnelle

Définition: La **densité conditionnelle** de X sachant $Y = y$ (tel que $f_Y(y) > 0$) est définie par

$$f_{X|Y}(x | y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si X et Y sont indépendantes, on a

$$f_{X|Y}(x | y) = f_X(x), \quad f_{Y|X}(y | x) = f_Y(y), \quad \text{pour tout } x \text{ et } y \in \mathbb{R}.$$

(mathématiquement, c'est pour 'presque' tout x, y)

Exemple Soient X et Y de densité conjointe

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{si } 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver les densités marginales de X et Y , et la densité conditionnelle $f_{X|Y}$. Les deux variables sont-elles indépendantes ?

Solution Exemple 123

$$f_{X,Y}(x,y) = x+y \quad \text{si } x,y \in [0,1], \quad 0 \quad \text{sinon}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy \quad (=0 \text{ si } x \notin [0,1])$$

$$f_X(x) = \int_0^1 (x+y) dy = x + \frac{1}{2} \quad \text{pour } x \in [0,1]$$

$$f_Y(y) = \dots = y + \frac{1}{2} \quad \text{si } y \in [0,1], \quad 0 \quad \text{sinon}$$

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{x+y}{y + \frac{1}{2}} \quad \text{si } x,y \in [0,1] \quad \text{pour } x=y=\frac{1}{4}$$

$f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x)$
 Par X, Y dépendantes

2.3 Valeurs caractéristiques

Mesure de tendance centrale

Définition: L'**espérance** d'une variable aléatoire X est

$$\mathbb{E}(X) = \begin{cases} \sum_i x_i f_X(x_i), & X \text{ discrète,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx, & X \text{ continue,} \end{cases}$$

si la somme/intégrale converge

$$\sum_{i,j} g(x_i, y_j) f_{X,Y}(x_i, y_j)$$

Propriétés :

- si X_1, \dots, X_n sont des variables aléatoires et a, b_1, \dots, b_n des constantes, alors

$$\mathbb{E}\left(a + \sum_{i=1}^n b_i X_i\right) = a + \sum_{i=1}^n b_i \mathbb{E}(X_i)$$

- pour g fonction 'raisonnable', $\mathbb{E}\{g(X)\} = \begin{cases} \sum_i g(x_i) f_X(x_i), & X \text{ discrète} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx, & X \text{ continue} \end{cases}$
- Si X, Y sont des variables aléatoires on définit $\mathbb{E}[g(X, Y)]$ de la même manière à l'aide de $f_{X,Y}$
- si X, Y sont indépendantes et g, h des fonctions 'raisonnables', alors

$$g(x) = \log x + e^x$$

$$\mathbb{E}\{g(X)h(Y)\} = \mathbb{E}\{g(X)\}\mathbb{E}\{h(Y)\}$$

Exemple binomial

Exemple Pour $X \sim \mathcal{B}(m, p)$, trouver $\mathbb{E}(X)$.

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^m x f_X(x) &= \sum_{x=1}^m x \frac{m!}{x!(m-x)!} p^x (1-p)^{m-x} \\ &= \sum_{x=1}^m \frac{m!}{(x-1)!(m-x)!} p^x (1-p)^{m-x} = \sum_{y=0}^{m-1} \frac{(m-1)! m}{y!(m-1-y)!} p^y (1-p)^{m-1-y} \\ &= m \sum_{y=0}^{m-1} \binom{m-1}{y} p^y (1-p)^{m-1-y} = mp \sum_{y=0}^{m-1} f_Y(y) \end{aligned}$$

$y = x - 1$

pour $Y \sim \mathcal{B}(m-1, p)$

Donc la somme vaut 1, et $\mathbb{E}(X) = mp$.