

Loi de Bernoulli

Définition: Une **variable aléatoire de Bernoulli** satisfait

$$X = \begin{cases} x_1 = 0 & \text{si échec} & \text{probabilité } 1 - p, \\ x_2 = 1 & \text{si succès} & \text{probabilité } p; \end{cases}$$

on écrit $X \sim \mathcal{B}(p)$. Sa loi de probabilité est donc

x_i	0	1	Total
$f_X(x_i) = \Pr(X = x_i)$	$1 - p$	p	1

où p est la probabilité de succès.

Exemple du lancer d'une pièce de monnaie avec probabilité p fixée d'obtenir "Pile".

Loi binomiale

Définition: On effectue m fois indépendamment une expérience qui mène soit à un succès (avec probabilité p) soit à un échec (avec probabilité $1 - p$). Soit X le nombre de succès obtenus. Alors on écrit $X \sim \mathcal{B}(m, p)$, et

$$f_X(x) = \frac{m!}{x!(m-x)!} p^x (1-p)^{m-x}, \quad x = 0, \dots, m.$$

Ceci est la **loi binomiale** avec nombre d'essais m et probabilité p . Dans le cas $m = 1$, X est une variable de Bernoulli. m s'appelle **dénominateur** et p **probabilité de succès**.

Exemple : m lancers indépendants d'une pièce de monnaie avec $\Pr(\text{"Pile"}) = p$ fixée. $m=3, x=2 \rightarrow$

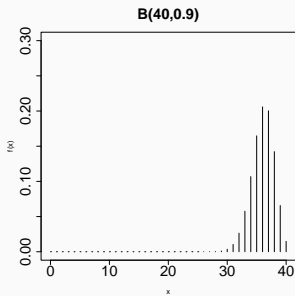
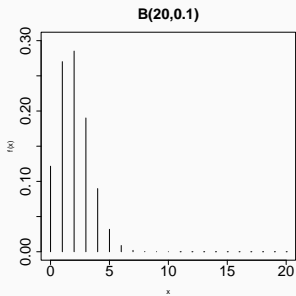
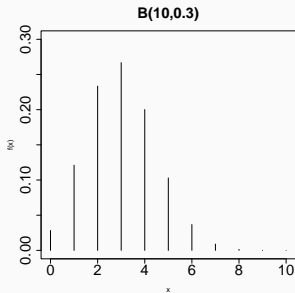
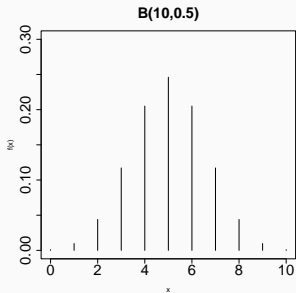
① ESS $\rightarrow p^2(1-p) = (1-p)p^2$
② SES $\rightarrow p(1-p)p = (1-p)p^2$

Exemple Trouver la loi du nombre X de personnes présentes à ce cours ayant leur anniversaire ce mois-ci

③ SSE $\rightarrow (1-p)p^2$

So $mme = 3p^2(1-p) = \binom{3}{2} p^2 (1-p)^{3-2} (1-p)p^2$

Fonctions de masse binomiale



Solution Exemple 99

- Hypothèses
- ① Les dates d'anniversaire sont indépendantes
 - ② Les dates sont réparties de manière homogène dans l'année
- Sous ces hypothèses avec $m=60$ $p = \frac{1}{12}$ ou $\frac{31}{365}$
- on a la distribution $B(m, p)$

Variable aléatoire de Poisson

Définition: Une variable aléatoire X pouvant prendre pour valeurs $0, 1, 2, \dots$ est dite de **Poisson** avec paramètre $\lambda > 0$ si

$$f_X(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, \quad x \in \{0, 1, 2, \dots\}, \quad \lambda > 0.$$

On écrit $X \sim \text{Poiss}(\lambda)$. λ représente la "moyenne" (l'espérance, cf. plus tard)

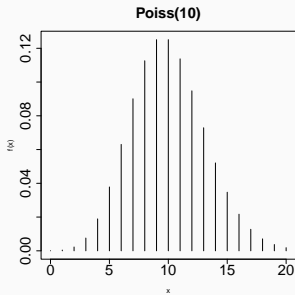
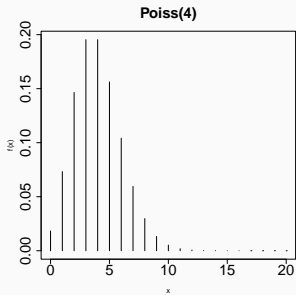
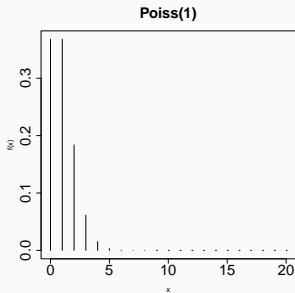
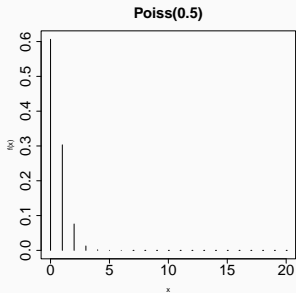
Applications :

- nombre d'appels téléphoniques par minute dans une centrale téléphonique
- nombre de fautes de frappe dans les notes de cours
- nombre d'avalanches mortelles en Suisse cet hiver

Exemple : E. coli Le niveau résiduel des bactéries *E. coli* dans l'eau traitée est de 2/100 ml, en moyenne. (a) Trouver la probabilité qu'il y ait $k = 0, 1, 2, 3$ présent dans un échantillon de 200 ml d'eau.

(b) Si on en trouve 10 dans un tel échantillon, l'eau est-elle bonne ?

Fonctions de masse Poisson



Solution Exemple 102

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{\lambda} \rightarrow f_{\bar{X}} \quad \text{fonction de masse}$$

Sur 200ml on s'attend à 4 bactéries

$$\lambda = 4 \quad \bar{X} \sim \text{POISS}(\lambda) \quad \Pr(\bar{X}=0) = \frac{4^0}{0!} e^{-4} = e^{-4} \\ \approx 0,0183, \quad \Pr(\bar{X}=1) = \frac{4^1}{1!} e^{-4} = 4e^{-4} \approx 0,0733 \\ \Pr(\bar{X}=2) = 8e^{-4}, \text{ etc.}$$

b) $\Pr(\bar{X}=10) \approx 0,005$, $\Pr(\bar{X} \geq 10) \approx 0,008$
donc peu vraisemblable que l'eau
soit traitée

Approximation poissonienne de la loi binomiale

Soit $X \sim \mathcal{B}(m, p)$ avec m grand et p petit. Alors

$$X \stackrel{\text{app}}{\sim} \text{Pois}(\lambda = mp).$$

$$p = \frac{\lambda}{n} \\ n \rightarrow \infty$$

Ceci s'appelle parfois la **loi des petits nombres**.

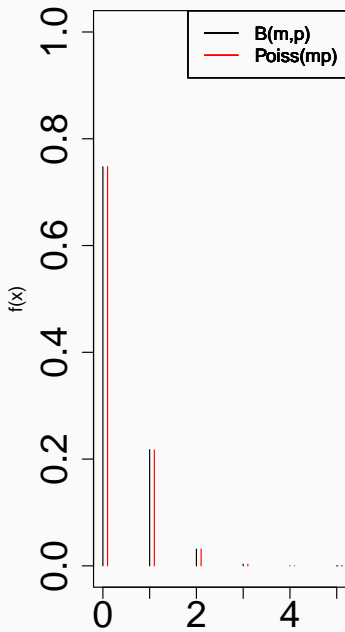
$$\begin{aligned} \Pr(X=x) &= \frac{m!}{x!(m-x)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{m-x} \\ &= \frac{\lambda^x}{x!} \frac{m!}{m^x(m-x)!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{m-x} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \end{aligned}$$

Exemple D'après IS-Academia, vous êtes m étudiant(e)s.

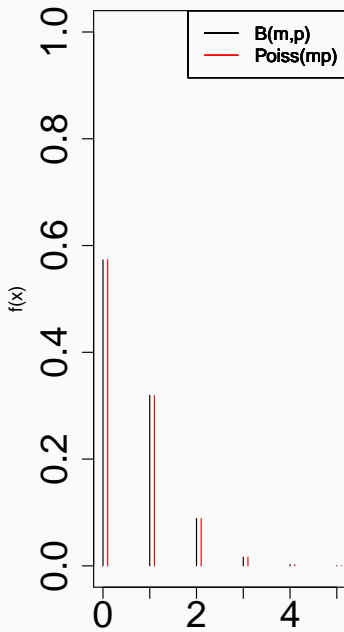
Soit X le nombre de personnes parmi vous dont l'anniversaire a lieu aujourd'hui.

Calculer les probabilités que $X = 0$, $X = 1$, et $X > 1$, sous la loi binomiale et son approximation poissonienne.

$m = 106, p = 1/365$



$m = 203, p = 1/365$




Variables aléatoires continues

Définition: On dit qu'une variable aléatoire X est **continue** s'il existe une fonction $f_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ appelée **fonction de densité** telle que

$$\Pr(X \in A) = \int_A f_X(u) du,$$

où $A \subseteq \mathbb{R}$ est un ensemble 'raisonnable'. Par exemple, pour $A = (a, b]$,

$\Pr(a < X \leq b)$ $\Pr(X \in A) = \Pr(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx,$



f_X n'est pas une probabilité, mais une limite

$$f_X(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \Pr(x - h \leq X \leq x + h)$$

Une variable continue peut prendre une infinité des valeurs, souvent dans un intervalle (borné, demi-droite, ou tout \mathbb{R}).

aire rouge $\approx f_X(x) 2h$

si $a = x - h$
 $b = x + h$
 $h > 0$ petit

Fonctions de densité et de répartition : propriétés

- Propriétés de la **fonction de densité** :

- $f_X(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$.

- Si l'on pose $a = b$, on a

$$\Pr(X = a) = \int_a^a f_X(x) dx = 0.$$

- La **fonction de répartition**, F_X , vérifie

$$F_X(a) = \Pr(X \leq a) = \Pr(X < a) = \int_{-\infty}^a f_X(x) dx, \quad a \in \mathbb{R}.$$

- On a, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$,

$$\Pr(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \Pr(a < X < b).$$

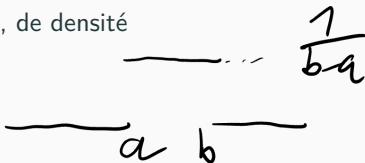
- On a

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = F'_X(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Quelques lois continues

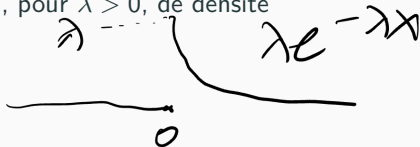
- **Loi uniforme** : $X \sim U(a, b)$, pour $a < b$, de densité

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & \text{si } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



- **Loi exponentielle** : $X \sim \exp(\lambda)$, pour $\lambda > 0$, de densité

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



- **Loi normale** : $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, pour $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$, de densité

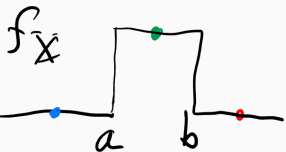
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $Z = (X - \mu)/\sigma \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ("standardisation").

Notations : $f_Z(z) = \phi(z)$ et $F_Z(z) = \Phi(z)$.

Quelques lois continues

$X \sim U[a, b]$



si $x < a$ $F_{\tilde{X}}(x) = \int_{-\infty}^x f_{\tilde{X}}(u) du = 0$

si $x \in (a, b)$

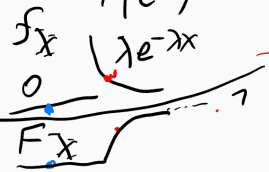
$$F_{\tilde{X}}(x) = \int_{-\infty}^a 0 du + \int_a^x \frac{1}{b-a} du = \frac{x-a}{b-a}$$

si $x > b$ $F_{\tilde{X}}(x) = 1$

si $x < 0$ $F_X(x) = \int_{-\infty}^x 0 du = 0$

si $x \geq 0$ $F_X(x) = \int_{-\infty}^x \lambda e^{-\lambda u} du$
 $= -e^{-\lambda u} \Big|_0^x = e^{-\lambda x} - (-e^{-\lambda \cdot 0}) = 1 - e^{-\lambda x}$

$X \sim \exp(\lambda)$



Exemple

Exemple Le M1 passe toutes les 5.5 minutes. Si j'arrive à un moment choisi au hasard, quelle est la probabilité que je doive attendre (a) plus de 3 minutes? (b) moins de 2 minutes? (c) entre 1 et 4 minutes?

$$X \sim U(0, 5.5)$$

$$a) \Pr(X > 3) = 1 - \Pr(X \leq 3) = 1 - \frac{3-0}{5.5-0} = \frac{5}{11}$$

$$b) \Pr(X \leq 2) = \frac{4}{11}$$

$$c) \Pr(1 \leq X \leq 4) = \frac{6}{11}$$