

Solution diapositive 81

Définissons les événements : A = "la pièce est défectueuse" et pour $i = 1, 2, 3$, A_i = "la pièce a été fabriquée par M_i ".

B_i : B_1, B_2, B_3 partition

$$Pr(B_1) = \frac{25}{100} \quad Pr(B_2) = \frac{35}{100} \quad Pr(B_3) = \frac{40}{100}$$

$$Pr(A|B_1) = \frac{5}{100} \quad Pr(A|B_2) = \frac{4}{100} \quad Pr(A|B_3) = \frac{2}{100}$$

Préba totale $Pr(A) =$

$$\frac{25}{100} \cdot \frac{5}{100} + \frac{35}{100} \cdot \frac{4}{100} + \frac{40}{100} \cdot \frac{2}{100} = 125 + 140 + 80 = 345\%$$

Théorème de Bayes

Théorème de Bayes Soient $A \subseteq \Omega$ et $\{B_i\}_{i=1,\dots,n}$ une partition (éventuellement infinie dénombrable) de Ω . Si $\Pr(A) > 0$ alors on a, pour tout $i = 1, \dots, n$,

$$\Pr(B_i | A) = \frac{\Pr(B_i \cap A)}{\Pr(A)} = \frac{\Pr(A | B_i) \Pr(B_i)}{\sum_{j=1}^n \Pr(A | B_j) \Pr(B_j)}$$

réf (pointing to the left side of the equation)
et (pointing to the right side of the equation)
probu total (pointing to the denominator of the right side)

- La formule de Bayes est très simple mais très utile, car elle permet une 'inversion du point de vue' dont on a souvent besoin en pratique.

Exemple Pour dépister une maladie, on applique un test. Si la maladie est présente, le test le découvre avec probabilité 0.99. Si la personne est saine, le test le trouve malade avec probabilité 0.02. Sachant qu'en moyenne un patient sur 1000 est atteint de la maladie, calculer la probabilité qu'un patient soit atteint sachant que son test a été positif. Comment améliorer ce résultat ?

Solution exemple Bayes

Soit M l'événement "le patient est atteint de la maladie", M^c l'événement complémentaire, et A l'événement "le résultat du test est positif".

(M, M^c) partition. Donne $Pr(A|M) = \frac{99}{100}$
 $Pr(A|M^c) = \frac{2}{100}$ $Pr(M) = \frac{1}{10000}$. Bayes

$$\begin{aligned} \underline{Pr(M|A)} &= \frac{Pr(A|M)Pr(M)}{Pr(A|M)Pr(M) + Pr(A|M^c)Pr(M^c)} \\ \text{recherche de} & \\ &= \frac{99}{\cancel{10000}} = \frac{99}{2097} \approx 0,047 \\ &= \frac{\cancel{\frac{99}{10000}} + \frac{1998}{\cancel{10000}}}{\dots} \end{aligned}$$

Si 10000 personnes sont malades font le test, 100 sont malades font le test, 1998 saines auront un test positive

Types d'indépendance

Les événements A_1, \dots, A_n sont **indépendants** si pour tout ensemble fini d'indices $F \subseteq \{1, \dots, n\}$ qui est non-vidé, on a

$$\Pr \left(\bigcap_{i \in F} A_i \right) = \prod_{i \in F} \Pr(A_i).$$

Définition: Les événements A_1, \dots, A_n sont **conditionnellement indépendants sachant B** si pour tout ensemble fini d'indices $F \subseteq \{1, \dots, n\}$ qui est non-vidé, on a

$$\Pr \left(\bigcap_{i \in F} A_i \mid B \right) = \prod_{i \in F} \Pr(A_i \mid B).$$

Exemples : indépendance conditionnelle

Exemple Une année donnée, la probabilité qu'un conducteur fasse une déclaration de sinistre à son assurance est μ , indépendamment des autres années. La probabilité pour une conductrice est de $\lambda < \mu$. Un assureur a le même nombre de conducteurs que de conductrices, et sélectionne une personne au hasard.

- (a) Donner la probabilité que la personne déclare un sinistre cette année
- (b) Donner la probabilité que la personne déclare des sinistres durant 2 années consécutives
- (c) Si la compagnie sélectionne au hasard une personne ayant fait une déclaration, quelle est la probabilité que cette personne fasse une déclaration l'année suivante ?
- (d) Montrer que la connaissance qu'une déclaration de sinistre ait été faite une année augmente la probabilité de déclarer un autre l'année suivante

Solution 87

Definir $A_i =$ "la personne sélectionnée déclare un sinistre sur l'année i " $i=1,2$, $F =$

"la personne sélectionnée est une femme"

$$Pr(F) = \frac{1}{2} = Pr(F^c) \quad Pr(A_i|F) = \lambda \quad Pr(A_i|F^c) = \mu$$

$$(a) \quad Pr(A_1) = Pr(A_1|F)Pr(F) + Pr(A_1|F^c)Pr(F^c) = \frac{\lambda + \mu}{2}$$

$$(b) \quad Pr(A_1 \cap A_2) = Pr(A_1 \cap A_2|F)Pr(F) + Pr(A_1 \cap A_2|F^c)Pr(F^c)$$

$$+ Pr(A_1 \cap A_2|F^c)Pr(F^c)$$

indépendance conditionnelle $Pr(A_1 \cap A_2|F)$ et pareil pour $Pr(A_1 \cap A_2|F^c)$

$$= Pr(A_1|F)Pr(A_2|F) \quad \text{et} \quad Pr(A_1|F^c)Pr(A_2|F^c)$$

Solution 87

$$P(A_1 \cap A_2 | F) = \lambda^2 \quad P(A_1 \cap A_2 | F^c) = \mu^2$$

$$(b) \frac{\lambda^2 + \mu^2}{2}$$

$$(c) P(A_2 | A_1) = \frac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)} = \frac{\lambda^2 + \mu^2}{\lambda + \mu}$$

(d) À montrer $P(A_2 | A_1) > P(A_2)$. On a

$$\frac{\lambda^2 + \mu^2}{\lambda + \mu} > \frac{\lambda + \mu}{2} \Leftrightarrow (\lambda^2 + \mu^2) \cdot 2 > (\lambda + \mu)^2$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\mu\lambda + \mu^2 > 0 \Leftrightarrow (\lambda - \mu)^2 > 0 \Leftrightarrow \lambda \neq \mu$$

À l'opposé, si $\lambda = \mu$, on a $P(A_2 | A_1) = P(A_2)$.

À l'opposé, si $\lambda < \mu$, on a $P(A_2 | A_1) < P(A_2)$.

2.2 Variables aléatoires

Définition

Exemple : lancer de deux dés. On s'intéresse à la somme obtenue plutôt qu'au fait de savoir si c'est le couple $\{1, 6\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 4\}$, $\{5, 2\}$ ou plutôt $\{6, 1\}$ qui est apparu.

Après avoir effectué une expérience aléatoire, on s'intéresse davantage à une **fonction du résultat** qu'au résultat lui-même—c'est une variable aléatoire.

Définition: Soit Ω un ensemble fondamental. Une **variable aléatoire** définie sur Ω est une fonction de Ω dans \mathbb{R} (ou dans un sous-ensemble $H \subseteq \mathbb{R}$) :

$$\begin{aligned} X : \quad \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longrightarrow X(\omega), \end{aligned}$$

où ω est un événement élémentaire.

L'ensemble H des valeurs prises par la variable aléatoire X peut être **discret** ou **continu**.

Par exemple :

- Nombre de piles obtenus en n lancers d'une pièce : $H = \{0, 1, \dots, n\}$.
- Nombre d'appels téléphoniques pendant une journée : $H = \{0, 1, \dots\}$.
- Temps d'attente au M1 : $H = [0, T_{\max}]$.
- Quantité de pluie demain : $H = \mathbb{R}_+$.

Variables aléatoires discrètes

Définition: Une variable aléatoire X est dite **discrète** si elle prend un nombre fini ou dénombrable de valeurs. Dénotons $x_i, i = 1, 2, \dots$, les valeurs possibles de X . Alors la fonction

$$f_X(x_i) = \Pr(X = x_i)$$

est appelée **fonction de masse** (ou fonction des fréquences). Le comportement d'une variable aléatoire discrète X est complètement décrit par

- les valeurs x_1, \dots, x_k (k pas nécessairement fini) que X peut prendre ;
- les probabilités correspondantes

$$f_X(x_1) = \Pr(X = x_1), \dots, f_X(x_k) = \Pr(X = x_k).$$

Fonction de masse

La **fonction de masse** f_X satisfait :

- $0 \leq f_X(x_i) \leq 1$, pour $i = 1, 2, \dots$
- $f_X(x) = 0$, pour toutes les autres valeurs de x .
- $\sum_{i=1}^k f_X(x_i) = 1$.

Exemple On lance deux dés équilibrés. Trouver :

(a) la fonction de masse de la somme ; (b) la fonction de masse du maximum.

Solution 92 (a)

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), \dots, (2,1), (2,2), \dots, (6,6)\}$$

$|\Omega| = 36$ équiprobabilité

$X = \text{somme}$

$D1/D2$	1	2	3	4	5	6	x_i	$f_X(x_i)$
1	2	3	4	5	6	7	2	1/36
2	3	4	5	6	7	8	3	2/36
3	4	5	6	7	8	9	4	3/36
4	5	6	7	8	9	10	5	4/36
5	6	7	8	9	10	11	6	5/36
6	7	8	9	10	11	12	7	6/36
							8	5/36
							9	4/36
							10	3/36
							11	2/36
							12	1/36

Solution 92 (b)

$P_1 \backslash P_2$	1	2	3	4	5	6	$Y = \max$	
1	1	2	3	4	5	6	y_i	$f_Y(y_i)$
2	2	2	3	4	5	6	1	1/36
3	3	3	3	4	5	6	2	3/36
4	4	4	4	4	5	6	3	5/36
5	5	5	5	5	5	6	4	7/36
6	6	6	6	6	6	6	5	9/36
							6	11/36

Fonction de répartition (cas discret ou continu)

Définition: La **fonction de répartition** F_X de la variable aléatoire (générale) X est

$$F_X(x) = \Pr(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad \text{continue}$$

Elle a les propriétés suivantes :

- F_X prend des valeurs dans $[0, 1]$
- F_X est continue à droite et monotone non décroissante, avec

$$\Pr(\{X \leq b\} \mid \{X \leq a\}) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$$

- $\Pr(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$
- $\Pr(X > x) = 1 - F_X(x)$
- si X est discrète, alors

$$F_X(x) = \sum_{\{i: x_i \leq x\}} \Pr(X = x_i), \quad x \in \mathbb{R}. \quad F_X(x_2) = p_2$$

et (sauf certains cas pathologiques) F_X est une fonction en escalier avec des sauts de taille $f_X(x_i)$ en x_i

Exemple Donner la fonction de répartition pour le maximum des résultats de deux dés.

Solution 95

y_i	$f_Y(y_i)$	$F_Y(y_i)$
1	1/36	1/36 = $\Pr(\max \leq 1)$
2	3/36	1/36 + 3/36 = 4/36 = $\Pr(\max \leq 2)$
3	5/36	1/36 + 3/36 + 5/36 = 9/36 = $\Pr(\max \leq 3)$
4	7/36	16/36
5	9/36	25/36
6	11/36	36/36

Quelques notations (cas discret ou continu)

Par la suite, nous utilisons les notations suivantes :

- Les variables aléatoires sont notées en majuscules (X, Y, Z, W, T, \dots).
- Les valeurs possibles des variables aléatoires sont notées en minuscules ($x, y, z, w, t, \dots \in \mathbb{R}$).
- La fonction de répartition d'une variable aléatoire X est notée F_X .
- La fonction de masse (ou de densité dans le cas continu, cf plus loin) d'une variable aléatoire X est notée f_X .
- Ces dernières sont notées F ou f s'il n'y pas de risque de confusion.
- $X \sim F$ signifie "la variable aléatoire X suit la loi F , i.e., admet F pour fonction de répartition".
- $X \overset{\text{app}}{\sim} F$ signifie "la variable aléatoire X suit approximativement la loi F ".