Série 9

Exercice 1. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées d'espérance $\mu \in \mathbb{R}$ et de variance $\sigma^2 \in (0, \infty)$, et soient $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et $\overline{X}_n = S_n/n$.

(i). Calculer $\mathbb{E}[S_n]$ et $\operatorname{Var}(S_n)$.

(ii). Trouver des constantes a_n et b_n telles que la variable aléatoire $Z_n = a_n (S_n - b_n)$ vérifie $\mathbb{E}[Z_n] = 0$ et $\operatorname{Var}(Z_n) = 1$.

(iii). Calculer $\mathbb{E}[\overline{X}_n]$ et $\operatorname{Var}(\overline{X}_n)$.

(iv). Trouver les constantes c_n et d_n telles que la variable aléatoire $Z_n = c_n (\overline{X}_n - d_n)$ vérifie $\mathbb{E}[Z_n] = 0$ et $\operatorname{Var}(Z_n) = 1$. (Noter que ce Z_n est le même que le Z_n dans la partie ((ii)).)

(v). En se basant sur l'énoncé, que peut-on dire de la loi de X_i pour $i \in \{1, \ldots, n\}$?

(vi). Que peut-on donc dire de $\Pr(X_i \leq x)$ pour une constante $x \in \mathbb{R}$ et $i \in \{1, \ldots, n\}$?

(vii). Que peut-on dire de la loi de Z_n si n est grand ?

(viii). Que peut-on dire de $\Pr(Z_n \leq x)$ pour une constante $x \in \mathbb{R}$ si n est grand ?

Exercice 2. Soit X le résultat du jet d'un dé équilibré. Trouver $E(X)$ et $\operatorname{Var}(X)$. On lance 10 dés équilibrés, en supposant que tous les lancers sont indépendants. Calculer approximativement la probabilité que la somme des dix résultats soit comprise entre 30 et 40.

Exercice 3. Vous voulez connaître le pourcentage de femmes parmi les étudiant-e-s de l'EPFL/UNIL, mais vous n'avez pas accès à la liste d'étudiant-e-s. Vous décidez donc d'utiliser ce que vous avez appris dans le cours afin d'estimer ce pourcentage.

(i). Quel sera votre modèle statistique ?

(ii). Quel sera le paramètre d'intérêt ?

(iii). Comment choisissez-vous votre échantillon ?

(iv). Quel sera votre estimateur (un choix intuitif est suffisant ici) ?

(v). L'estimateur est une variable aléatoire. Comment voit-on cela dans votre situation ?

(vi). Etant une variable aléatoire, votre estimateur a une espérance et une variance. Supposez que le vrai pourcentage est de 40 % (valeur fictive !), et que vous avez un échantillon de taille 100. Calculez l'espérance et la variance de votre estimateur. Comment ces valeurs changent-elles en fonction de la taille de l'échantillon ? Est-ce que votre estimateur est biaisé (c'est-à-dire, est-ce que l'espérance de votre estimateur est différente de la vraie valeur 40%) ?

(vii). Si le vrai pourcentage est de 40 %, quelle est la taille de l'échantillon dont vous avez besoin afin d'être certain à 95 % que votre estimateur sera plus petit que 50 % ? Indication : utilisez une loi approximative.

Exercice 4. On suppose que le nombre de clients entrant dans un magasin un jour donné est une variable de Poisson de paramètre $\lambda = 12$, et on suppose que le nombre de clients pour des jours différents est indépendant.

(i). Approximer la probabilité qu'il y ait au moins 250 entrées durant un mois de 22 jours ouvrables.

(ii). Combien de jours le magasin devra-t-il ouvrir ses portes pour être sûr à 97.5 % d'accueillir au moins 250 clients ?

Exercice 5. Soit X_1 une variable aléatoire dont la fonction de densité est $f(x) = cx^{\theta-1}$ pour $x \in (0,1)$ et $f(x) = 0$ autrement. Ici c est une constante et $\theta > 0$ est un paramètre inconnu.

(i). Calculez c.

(ii). Calculez l'espérance de X_1.

Maintenant, considérons un échantillon $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de variables de cette distribution.

(iii). Trouvez $\hat{\theta}_{ML}$, l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ.

(iv). Trouvez $\widehat{\theta}_{MOM}$, l'estimateur par la méthode des moments.

Exercice 6. Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} \mathcal{B}(p)$ avec $p \in (0,1)$.

(i). Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ une réalisation de cet échantillon. Ecrivez la fonction de vraisemblance de p basée sur cette réalisation.
Rappel : pour une variable $X \sim \mathcal{B}(p)$ on a $P(X = x) = p^x(1-p)^{1-x}$ pour $x = 0, 1$.

(ii). Trouvez $\hat{p}_{MOM}$, l'estimateur des moments de p.

(iii). Trouvez $\hat{p}_{ML}$, l'estimateur du maximum de vraisemblance de p.

(iv). Les estimateurs définis ci-dessus sont-ils biaisés (c'est-à-dire, est-ce que leur espérance est égale à ou différente de p) ? Trouvez leur variance.

Exercice 7. On considère une variable aléatoire Y suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On veut estimer la valeur de λ à partir d'un échantillon de n observations $Y_1, \ldots, Y_n$ indépendantes et identiquement distribuées.

(i). Calculer l'espérance et la variance de Y.

(ii). Quelle est la distribution approximative de $\overline{Y}_n = \sum_{i=1}^n Y_i/n$ pour n très grand ?

(iii). Trouver l'estimateur du maximum de vraisemblance de λ.

(iv). Quelle est la distribution approximative de l'estimateur $\hat{\lambda}_{ML}$? *Indice* : méthode delta.