SÉRIE 7

Exercice 1. Calculez l'espérance et la variance des variables aléatoires suivantes :

(a) $X \sim \mathcal{B}(p)$,

(b) Y avec la densité $f(y) = 5\,y^4$ si $y \in (0,1)$, et $f(y) = 0$ sinon,

(c) Z avec la fonction de fréquences donnée par

z_i	1	2	3	4	5	6
$f(z_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

,

(d) W avec la fonction de répartition $F(w) = 1 - \frac{1}{w^4}$ si $w \geq 1$, et $F(w) = 0$ sinon.

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire avec la densité $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$ si $x \geq 0$ et $f(x) = 0$ sinon. Reconnaissez-vous cette loi ? En supposant que $\lambda > 2$, calculez $\mathbb{E}[\mathrm{e}^X]$ et $\mathrm{Var}[\mathrm{e}^X]$.

Exercice 3. On jette deux dès tétraédriques équilibrés (avec 4 faces équiprobables), un rouge et un vert.

(i). Donner un espace de probabilité pour cette expérience aléatoire.

(ii). Trouver la loi de probabilité conjointe pour la somme des deux faces cachées, S, et leur maximum, M. Est-ce que S et M sont indépendants ?

(iii). Trouver la loi conditionnelle de la somme, sachant que le maximum est égale 4 (c'est-à-dire trouver $f_{S,M}(s|4)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$).

(iv). Trouver la loi marginale du maximum.

Exercice 4. On définit trois variables aléatoires indépendantes Y_1, Y_2, Y_3 telles que $\mathbb{E}[Y_i] = i$ et $\mathrm{Var}[Y_i] = i$ pour $i = 1, 2, 3$. Soient $Z_1 = \frac{1}{2}(Y_1 + 2Y_2)$, $Z_2 = \frac{1}{2}(Y_2 - Y_3)$, et $Z_3 = \frac{1}{3}(Y_1 + Y_2 + Y_3)$. Trouvez l'espérance et la variance de Z_i pour $i = 1, 2, 3$, et calculez leur corrélation.

Exercice 5. Une entreprise met en boîte des mélanges pour apéritifs. Ces mélanges contiennent des amandes, des noix de cajou et des cacahuètes. Le poids net de la boîte est exactement 1 kg, mais la proportion de chacun des ingrédients est aléatoire. Puisque la somme des trois poids donne 1, la loi conjointe de deux des trois poids fournit toute l'information sur le contenu. Soit X le poids des amandes et Y celui des noix de cajou. On suppose que la loi conjointe de X et Y est donnée par

$$f(x,y) = \begin{cases} 24\,xy & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \text{ et } x + y \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(a) Vérifiez que f est bien une densité.

(b) Calculez les lois marginales de X et de Y.

(c) X et Y sont-elles indépendantes ? Justifiez de deux manières différentes.

(d) Calculez $\Pr(X < Y)$.

(e) Calculez $\Pr(X < 1/3 \,|\, Y > 1/2)$.

(f) Calculez la densité conditionnelle de Y sachant $X = x$.

(g) Calculez $\mathrm{cov}(X, Y)$.

Exercice 6. Juliette a donné rendez-vous à Roméo à 21h00 environ sous son balcon. L'heure d'arrivée de Roméo est une variable aléatoire uniformément distribuée entre 20h55 et 21h05. L'heure d'apparition de Juliette est uniformément distribuée entre 20h50 et 21h20, indépendamment de l'arrivée de Roméo.

Pour simplifier les calculs, choisissons 20h50 comme heure de référence, puis définissons X : heure d'arrivée de Roméo, et Y : heure d'arrivée de Juliette. D'après l'énoncé, on a $X \sim U(5, 15)$ et $Y \sim U(0, 30)$.

(i). Quelles sont l'espérance et la variance de l'heure d'apparition de Juliette ?

(ii). Quelle est la probabilité que Roméo doive attendre Juliette ?

(iii). Quelle est la probabilité que la première personne présente au rendez-vous n'attende pas plus de 5 minutes ?

Exercice 7. À l'ouverture d'un guichet, la file d'attente se compose de quatre personnes. Supposons que le temps de service de chaque client (en minutes) suive une loi exponentielle $\exp(1/2)$, et que ces temps soient indépendants.

Soit D le temps d'attente jusqu'au début du service du dernier des quatre clients.

(i). Calculer l'espérance et la variance de D.

(ii). Quelle est la loi du temps de service le plus court des quatre clients ? *Indice :* Si X_i ($i = 1, 2, 3, 4$) sont les temps de service, calculer $\Pr\{\min(X_1, \dots, X_4) > t\}$ et en déduire la densité de $Y = \min(X_1, \dots, X_4)$.