Série 4

Les exercices étoilés sont plus difficiles.

Exercice 1. Reprenons l'exemple du cours avec le test : Pour dépister une maladie, on applique un test. Si la maladie est présente, le test le découvre avec probabilité 0.99. Si la personne est saine, le test le trouve malade avec probabilité 0.02. En moyenne un patient sur 1000 est atteint de la maladie. Un patient est déclaré comme malade si deux tests indépendants donnent un résultat positive.

(i). Calculer la probabilité qu'un patient soit atteint sachant que ses deux tests ont été positifs. Comparer avec le chiffre trouvé en cours.

(ii). Les résultats des tests sont conditionnellement indépendants sachant l'état de santé de la personne choisie. Montrer qu'ils ne sont pas indépendants.

Exercice 2. On jette un dé équilibré. Considérons l'ensemble fondamental $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, et la probabilité $\Pr(i) = 1/6$, $i \in \{1, \ldots, 6\}$.
Définissons la variable aléatoire X : le chiffre qu'on a obtenu sur le dé, et la variable aléatoire Y :

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si on a obtenu un } 6, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(a) Décrivez les variables X et Y de la manière formelle, i.e. comme des fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$.

(b) Quel est l'ensemble H des valeurs prises pour la variable X ? Et pour Y ?

(c) Donnez la fonction des fréquences pour la variable X. Faites de même pour Y.

(d) Donnez la fonction de répartition pour la variable X. Faites de même pour Y.

Exercice 3. Est-ce que les fonctions suivantes peuvent être des fonctions de fréquences ?

x_i	0	1	2	3
$f(x_i)$	0.25	0.25	0.25	0.25

x_i	0	1	2	3
$f(x_i)$	0.15	0.15	0.15	0.15

x_i	0	1	2	3	4	5
$f(x_i)$	0.03	0.16	0.31	0.31	0.16	0.03

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x_i)$	0.30	0.21	0.15	0.10	0.07	0.05	0.04	0.02	0.02	-0.01	0.03

Exercice 4. La loi de la variable aléatoire X est donnée par $P(X = i) = c(1-p)^i$ pour $i = 0, 1, 2, \ldots$ et $0 < p < 1$.

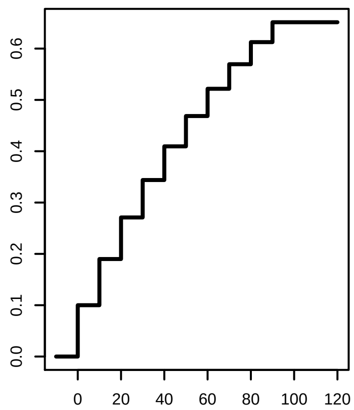
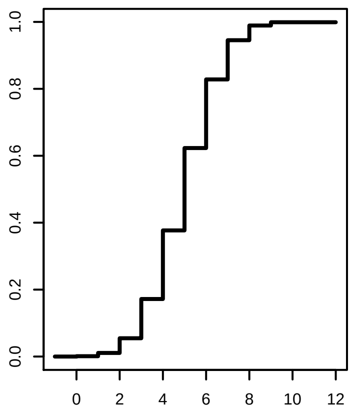
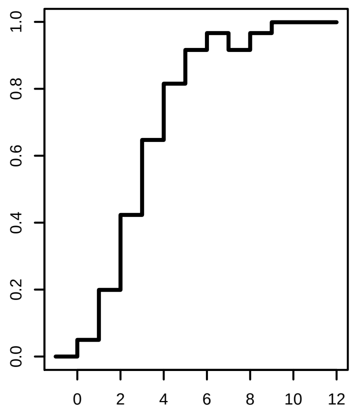
(a) Trouvez c.

(b) Calculez $Pr(X = 0)$.

(c) Calculez $Pr(X > 2)$.

(d) Montrez que $Pr(X \geq m + n \,|\, X \geq n) = Pr(X \geq m)$ pour $m, n = 0, 1, \ldots$.
Indication : On peut utiliser le fait que $1 + u + u^2 + \cdots + u^n = \frac{1-u^{n+1}}{1-u}$ si $u \neq 1$.

Exercice 5. Est-ce que les fonctions suivantes peuvent être des fonctions de répartition ?

Exercice 6. Quelle est la loi de la variable Y de l'exercice 2 ? Est-ce que c'est une des lois que vous avez vues en classe ?

Exercice 7. Un système de communication est composé de n composants. Chaque composant fonctionne avec une probabilité p, et ce, indépendamment des autres.

(a) Quelle est la loi de la variable aléatoire X qui donne le nombre de composants qui fonctionnent ? Est-ce que c'est une des lois que vous avez vues en classe ?

(b) Le système fonctionne lorsqu'au moins la moitié des composants sont opérationnels. Pour quelles valeurs de p, un système à 5 composants a-t-il une plus grande probabilité de fonctionner qu'un système à 3 composants ?

Exercice 8. * Julie laisse habituellement la clé de sa voiture dans une poche du manteau qu'elle porte en conduisant. Elle a trois manteaux et quand elle a besoin de sa clé, elle ne se souvient plus de quel manteau elle a porté la dernière fois qu'elle a conduit. Elle cherche donc sa clé à chaque fois qu'elle doit prendre sa voiture. De plus elle est souvent en retard, il lui arrive donc de ne pas trouver sa clé même lorsqu'elle cherche dans la bonne poche, car elle ne prend pas le temps de bien regarder.

Aujourd'hui elle pense avoir laissé la clé dans le manteau court avec une probabilité p_c, dans le manteau long avec une probabilité p_l, et dans la veste trench avec la probabilité p_v. Si la clé est dans le manteau court, elle la retrouve pendant la recherche dans ses poches avec une probabilité de α_c. Pour le manteau long, cette probabilité est de α_l, et pour la veste trench elle est de α_v.

Elle a déjà cherché dans le manteau court et elle n'a rien trouvé. Quelle est la probabilité que la clé s'y trouve quand même ?

Exercice 9. * Un mathématicien oublie son parapluie dans un magasin avec une probabilité de 1/4. Aujourd'hui il a pris son parapluie pour faire ses courses, et il a été dans 4 magasins différents. Sachant qu'il est rentré chez lui sans le parapluie, quelle est la probabilité qu'il l'ait oublié dans le dernier magasin ?