

## 2. Probabilité

# Expériences aléatoires

La théorie des probabilités permet de décrire et modéliser les **phénomènes aléatoires**.

Les actions qui mènent à des résultats aléatoires sont appelées des **expériences aléatoires**. Plus précisément, une expérience est dite aléatoire s'il est impossible de prévoir son résultat. En principe, on admet qu'une expérience aléatoire peut être répétée (indéfiniment) dans des conditions identiques ; son résultat peut donc varier d'une réalisation à l'autre.

Exemples :

- lancer d'un dé ou d'une pièce de monnaie ;
- tirage d'une carte.

## 2.1. Probabilité d'événements

## Modèles probabilistes d'une expérience aléatoire

- **Ensemble fondamental**  $\Omega$  : tous les résultats possibles
- **Événement élémentaire**  $\omega \in \Omega$  : un résultat possible.
- **Événement** : un sous-ensemble (raisonnable)  $A \subseteq \Omega$ . Un événement peut réunir plusieurs événements élémentaires.
- On dit qu'un événement est **réalisé** si le résultat de l'expérience aléatoire (événement élémentaire) appartient à cet événement.

**Exemple** Lancer d'une pièce de monnaie :

$$\Omega = \{P, F\}.$$

$$A = \{P\} = \text{"Pile"} \text{ est un événement (élémentaire)}$$

**Exemple** Lancer d'un dé :

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

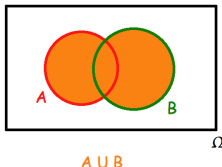
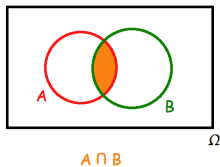
$$A = \text{"obtenir 1"} = \{1\} \text{ est un événement (élémentaire).}$$

$$B = \text{"obtenir un chiffre pair"} = \{2, 4, 6\} \text{ est un événement (composé).}$$

# Diagramme de Venn et opérations entre événements

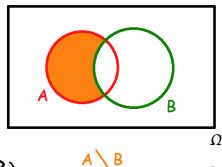
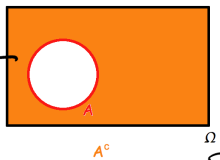
- $A \cup B = B \cup A$  union
- $A \cap B = B \cap A$  intersection
- $A^c$  complémentaire
- $A \setminus B = A \cap B^c$  différence;  $A \setminus B \neq B \setminus A$
- $\emptyset$  ensemble vide
- $A = \{2, 4, 6\}$  (pair)
- $B = \{2, 3, 5\}$  (premier)

$\{2\}$



$\{2, 3, 4, 6\}$   
 $\{5, 6\}$

$\{1, 3, 5\}$



$\{4, 6\}$

$B \setminus A = \{3, 5\}$

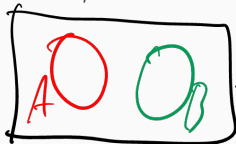
# Fonction de probabilité

**Définition:** Les événements  $A$  et  $B$  sont **disjoints** si  $A \cap B = \emptyset$ .

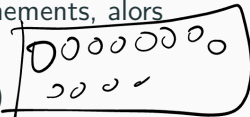
Événements  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sont disjoints si  $A_i \cap A_j = \emptyset$  quand  $i \neq j$ .

**Définition:** Une fonction de probabilité, notée ici  $\Pr$ , est une fonction telle que

- $0 \leq \Pr(A) \leq 1$  pour tout événement  $A$ ;
- $\Pr(\Omega) = 1$ , (événement certain);
- Si  $A_1, \dots, A_n$  est une collection disjointe d'événements, alors



$$\Pr \left( \bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \sum_{i=1}^n \Pr(A_i)$$



De même pour une collection infinie dénombrable  $A_1, A_2, \dots$

$$A_1 \cup A_2$$

$$\Pr(A_1 \cup A_2) = \Pr(A_1) + \Pr(A_2)$$

# Propriétés d'une fonction de probabilité

- $\Pr(\emptyset) = 0$ , (événement impossible);

- $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$ ;

- $\Pr(A^c) = 1 - \Pr(A)$ , (événement complémentaire de  $A$ );

- $A \subseteq B \Rightarrow \Pr(A) \leq \Pr(B)$ .

$$A = A \cup \emptyset$$

~~$$\Pr(A) = \Pr(A \cup \emptyset)$$~~

~~$$\Pr(A \cap \emptyset)$$~~

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$B = A \cup (B \setminus A)$$

**Exemple** Deux lancers d'une pièce de monnaie :

$$\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}.$$

(a) Expliciter les événements  $A =$  "au moins un P",  $B =$  "au moins un F",  $A \cap B$ , et  $A \cup B$ .

$$A = \{PF, PP, FP\}$$

$$B = \{PF, FP, FF\}$$

(b) Trouver les probabilités correspondantes si

$$A \cup B = \{PF, FP\}$$

$$A \cup B = \Omega$$

$$\Pr(\{PP\}) = \dots = \Pr(\{FF\}) = 1/4.$$

$$\Pr(A) + \Pr(A^c) = 1$$

$$A \cup A^c = \Omega$$
$$A \cap A^c = \emptyset$$

$$P(A) \quad P(B), \quad P(A \cup B) \quad P(A \cap B)$$

---

$$\begin{aligned} \text{Si: } P(\{FF\}) &= P(\{FP\}) \\ &= P(\{PF\}) = P(\{PP\}) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$A = \{PF, FP, PP\}$$

$$= \{PF\} \cup \{FP\} \cup \{PP\}$$

$$P(A) = P(\{PF\}) + \dots$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$P(B) = \frac{3}{4} \quad P(A \cup B) = 1 \quad P(A \cap B) = \frac{1}{2}$$

## Solution (diapositive 69)

On veut  $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$



$$\begin{aligned} \Pr(A) + \Pr(B) &= \text{[red circle]} + \text{[blue circle]} \\ &= \text{[red circle]} + \text{[green circle]} = \Pr(A \cup B) + \Pr(A \cap B) \end{aligned}$$

## Événements élémentaires équiprobables

Sous l'hypothèse **d'équiprobabilité des événements élémentaires**, pour tout événement  $A$  de  $\Omega$ ,

$$\begin{aligned}\Pr(A) &= \frac{\text{nombre d'événements élémentaires dans } A}{\text{nombre total d'événements élémentaires dans } \Omega} \\ &= \frac{\text{nombre de cas favorables à } A}{\text{nombre total de cas possibles}}.\end{aligned}$$

**Exemple** Lancer d'un dé. **Supposons** que les six faces ont les mêmes chances d'apparaître (événements élémentaires équiprobables). Alors

$$\Pr(\{1\}) = \Pr(\{2\}) = \dots = \Pr(\{6\}) = \frac{1}{6},$$

et

$$\begin{aligned}\Pr(\text{"obtenir un nombre pair"}) &= \Pr(\{2, 4, 6\}) = \Pr(\{2\}) + \Pr(\{4\}) + \Pr(\{6\}) \\ &= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

**Exemple** Lancers de deux dés. Trouver  $\Pr(\text{"la somme des faces vaut 7"})$ .

## Solution (diapositive 71)

Supposer équiprobabilité

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), \dots, (6,6)\}$$

$|\Omega| = 36$ , pour une somme = 7

$$\text{on a } \{(1,6), (2,5), (3,4), \dots, (6,1)\}$$

donc 6 possibilités

$$\text{Pr}(\text{"la somme vaut 7"}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

# Probabilité conditionnelle et indépendance

La probabilité que l'événement  $A$  se réalise peut être influencée par la réalisation d'un autre événement  $B$ . Pour formaliser cette idée, on introduit les concepts de probabilité conditionnelle et d'indépendance :

**Définition:** La **probabilité conditionnelle** de  $A$  sachant que  $B$  s'est réalisé est définie par

$$\Pr(A | B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}, \quad \text{si } \Pr(B) > 0.$$

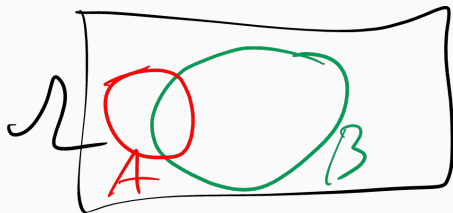
**Définition:** Deux événements  $A$  et  $B$  sont dits **indépendants** si  $\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \times \Pr(B)$ .

**Intuition :** si  $\Pr(B) > 0$ , c'est équivalent à

$$\Pr(A | B) = \Pr(A).$$

Si  $\Pr(A) = 0$   
alors  $\Pr(A \cap B) = 0$   
 $\Rightarrow A, B$  indép

# Probabilité conditionnelle



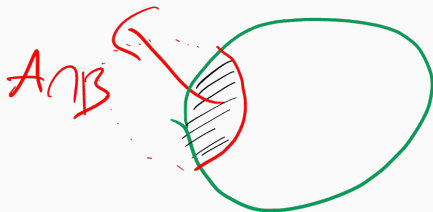
$$\Pr(A|B)$$

$B$  réalisée

neuveau

vers

où  $\tilde{\Omega} = B$



$\tilde{\Omega} = B$

$$\frac{\text{l'aire}}{= \Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$$

## Exemples

**Exemple** Deux lancers d'une pièce de monnaie. Trouver la probabilité d'obtenir pile au 2ème lancer sachant qu'on a obtenu pile au 1er lancer.

**Exemple : Lancer d'un dé** Les événements  $A = \{2, 4\}$  et  $B = \{2, 4, 6\}$  sont-ils indépendants ?

$$Pr(B|A) = \frac{1}{2} \neq Pr(B) = \frac{1}{2} \Rightarrow A, B \text{ sont dépendants}$$

Ne pas confondre indépendance et incompatibilité ( $A$  et  $B$  disjoints)!

Soient  $A, B$  disjoints tels que  $Pr(A), Pr(B) > 0$ . On a

$$Pr(A \cap B) = Pr(\emptyset) = 0, \quad \text{mais} \quad Pr(A) \times Pr(B) \neq 0,$$

donc  $A$  et  $B$  sont dépendants. Donc

$A \cap B = \emptyset \Rightarrow A$  et  $B$  dépendants, et ainsi,  $A$  et  $B$  indépendants  $\Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$ .

Par ailleurs

$$A \cap B \neq \emptyset \nRightarrow A \text{ et } B \text{ indépendants.}$$

$$\Omega = \{PF, FF, FP, PP\}$$

$$A = \text{"pile au 2me lancer"} = \{FP, PP\}$$

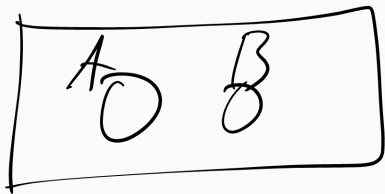
$$B = \text{"pile au 1er lancer"} = \{PF, PP\}$$

$$Pr(A|B) = \frac{Pr(A \cap B)}{Pr(B)}$$

$$A \cap B = \{PP\}$$

$$= \frac{1/4}{2/4} = \frac{1}{2} = Pr(A)$$

$\Rightarrow A, B$  sont indep



$A, B$  disjoints

$$A \cap B = \emptyset$$

(incompatible)

Si  $A$  se réalise,  $B$  ne se réalise pas

$$P(A) = 0 \neq P(B)$$

$A \cap B = \emptyset \Rightarrow A, B$  sont  
dépendants

## Indépendance : généralisation

**Définition:** Les événements  $A_1, \dots, A_n$  sont **indépendants** si, pour tout sous-ensemble d'indices  $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ , on a

$$\Pr \left( \bigcap_{j=1}^k A_{i_j} \right) = \prod_{j=1}^k \Pr(A_{i_j}).$$

**Exemple** Un système de  $n$  composants est appelé **système en parallèle** s'il fonctionne dès qu'au moins un de ses composants fonctionne. Un **système en série** fonctionne si et seulement si tous ses composants fonctionnent.

(a) Si le  $i$ ème composant fonctionne indépendamment de tous les autres et avec une probabilité  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , quelle est la probabilité de fonctionnement d'un système en parallèle ?

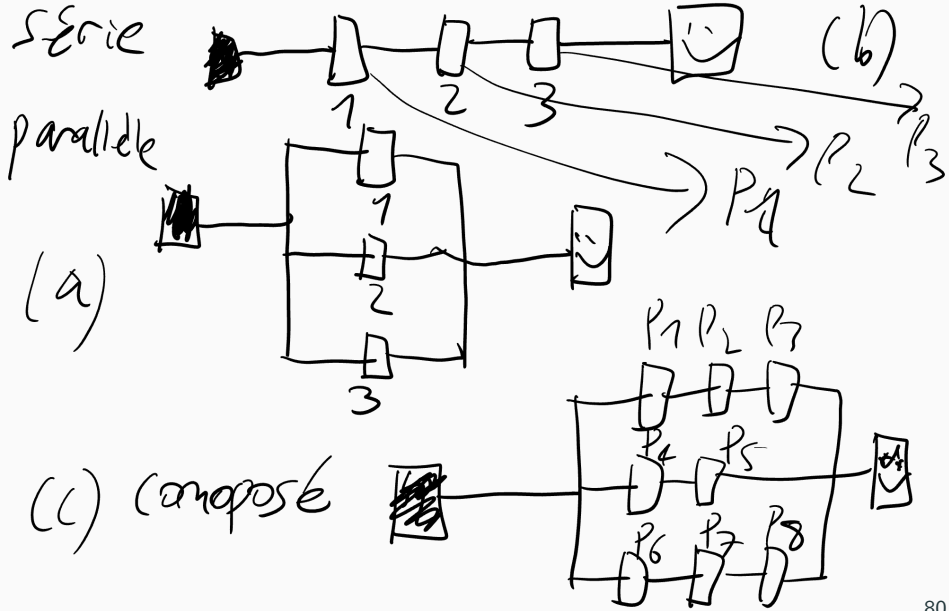
(b) Même question pour un **système en série**.

(c) Même question pour un **système composé**.

$n=3$  ( $A_1, A_2, A_3$ ) indépendants

$$\begin{cases} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \times P(A_2) \times P(A_3) \\ P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P(A_2) \\ P(A_1 \cap A_3) = P(A_1) \times P(A_3) \\ P(A_2 \cap A_3) = P(A_2) \times P(A_3) \end{cases}$$

# Solution diapositive 78



$A_i = \{ \text{"l' composant } i \text{ fonctionne"} \}$

$P(A_i) = P_i, (A_1, \dots, A_n) \text{ indep}$

$A = \{ \text{"le système fonctionne"} \}$

(b) série  $A = \bigcap A_i$

$$\begin{aligned}
 P(A) & \stackrel{\text{indep}}{=} P(A_1) \times P(A_2) \times \dots \times P(A_n) \\
 & = \prod_{i=1}^n P_i = P_1 \times P_2 \times \dots \times P_n
 \end{aligned}$$

(a) parallèle  $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$

$A^c = \{ \text{"le système ne fonctionne pas"} \}$   
 $= \{ \text{"aucun composant fonctionne"} \} = \bigcap_{i=1}^n A_i^c$

$(A_1, \dots, A_n)$  indép  $\Rightarrow (A_1^c, \dots, A_n^c)$  indép

$$Pr(A^c) = \prod_{i=1}^n Pr(A_i^c) = \prod_{i=1}^n (1 - p_i)$$

$$1 - Pr(A) \Rightarrow Pr(A) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i)$$

$$(c) P^{\wedge}(A) =$$

$$1 - (1 - p_1 p_2 p_3)(1 - p_4 p_5)(1 - p_6 p_7 p_8)$$

## Formule des probabilités totales

**Définition:** Soit  $A$  un événement quelconque de  $\Omega$ , et  $\{B_i\}_{i=1,\dots,n}$  une **partition** de  $\Omega$ , c'est-à-dire,

$$B_i \cap B_j = \emptyset, \quad i \neq j, \quad \bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega.$$

La **formule des probabilités totales**

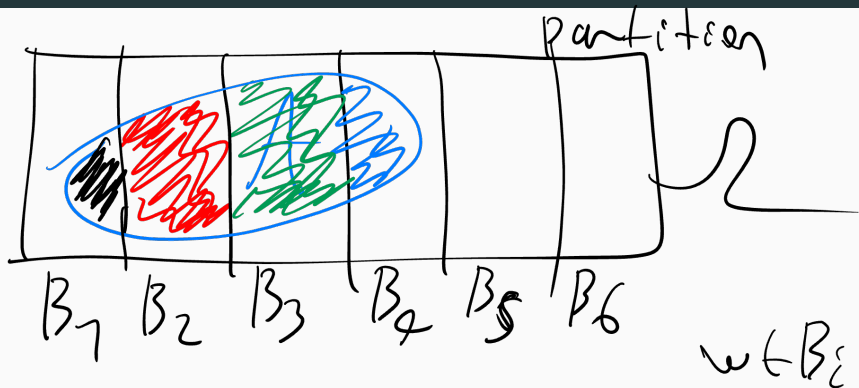
$$\Pr(A) = \sum_{i=1}^n \Pr(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^n \Pr(A | B_i) \Pr(B_i).$$

Elle est également valide pour une partition infinie dénombrable.

**Exemple** Trois machines  $M_1, M_2$  et  $M_3$  fabriquent des pièces dans les proportions respectives 25%, 35% et 40%. On sait que respectivement 5%, 4% et 2% des pièces produites par  $M_1, M_2$  et  $M_3$  sont défectueuses. On choisit une pièce aléatoirement. Calculer

$\Pr(\text{“la pièce est défectueuse”})$ .

# Formule des probabilités totales : diagramme de Venn



$$B_i \cap B_j = \emptyset \quad \text{si } i \neq j$$

$$\bigcup_{i=1}^6 B_i = \Omega$$

$$pr(\pi) = \frac{\text{wt } B_1 + \text{wt } B_2 + \text{wt } B_3}{\text{wt } \Omega}$$