2. Probabilité

Expériences aléatoires

La théorie des probabilités permet de décrire et modéliser les **phénomènes aléatoires**.

Les actions qui mènent à des résultats aléatoires sont appellées des **expériences aléatoires**. Plus précisément, une expérience est dite aléatoire s'il est impossible de prévoir son résultat. En principe, on admet qu'une expérience aléatoire peut être répétée (indéfiniment) dans des conditions identiques ; son résultat peut donc varier d'une réalisation à l'autre.

Exemples :

- lancer d'un dé ou d'une pièce de monnaie ;
- tirage d'une carte.

2.1. Probabilité d'événements

Modèles probabilistes d'une expérience aléatoire

- **Ensemble fondamental** Ω : tous les résultats possibles
- **Événement élémentaire** $\omega \in \Omega$: un résultat possible.
- **Événement** : un sous-ensemble (raisonnable) $A \subseteq \Omega$. Un événement peut réunir plusieurs événements élémentaires.
- On dit qu'un événement est **réalisé** si le résultat de l'expérience aléatoire (événement élémentaire) appartient à cet événement.

Exemple Lancer d'une pièce de monnaie :

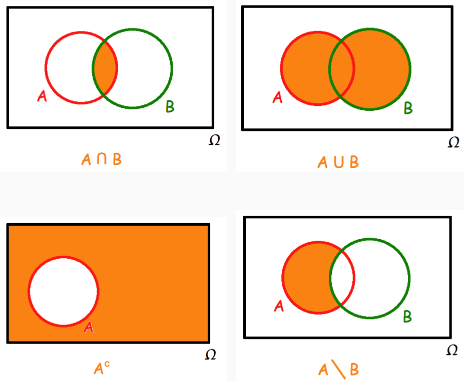
$$\begin{aligned} \Omega &= \{P, F\}. \\ A &= \{P\} = \text{“Pile” est un événement (élémentaire)} \end{aligned}$$

Exemple Lancer d'un dé :

$$\begin{aligned} \Omega &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}. \\ A &= \text{“obtenir 1”} = \{1\} \text{ est un événement (élémentaire).} \\ B &= \text{“obtenir un chiffre pair”} = \{2, 4, 6\} \text{ est un événement (composé).} \end{aligned}$$

Diagramme de Venn et opérations entre événements

- $A \cup B = B \cup A$ union
- $A \cap B = B \cap A$ intersection
- A^c complémentaire
- $A \setminus B = A \cap B^c$ différence ; $A \setminus B \neq B \setminus A$
- $\emptyset$ ensemble vide
- $A = \{2, 4, 6\}$ (pair)
- $B = \{2, 3, 5\}$ (premier)



Fonction de probabilité

Définition: Les événements A et B sont **disjoints** si $A \cap B = \emptyset$.

Événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont disjoints si $A_i \cap A_j = \emptyset$ quand $i \neq j$.

Définition: Une fonction de probabilité, notée ici $\Pr$, est une fonction telle que

- $0 \leq \Pr(A) \leq 1$ pour tout événement A ;
- $\Pr(\Omega) = 1$, (événement certain) ;
- Si $A_1, \ldots, A_n$ est une collection disjointe d'événements, alors

$$\Pr\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(A_i)$$

De même pour une collection infinie dénombrable $A_1, A_2, \ldots$

Propriétés d'une fonction de probabilité

- $\Pr(\emptyset) = 0$, (événement impossible) ;
- $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$;
- $\Pr(A^c) = 1 - \Pr(A)$, (événement complémentaire de A) ;
- $A \subseteq B \Rightarrow \Pr(A) \leq \Pr(B)$.

Exemple Deux lancers d'une pièce de monnaie :

$$\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}.$$

(a) Expliciter les événements $A =$"au moins un P", $B =$"au moins un F", $A \cap B$, et $A \cup B$.
(b) Trouver les probabilités correspondantes si

$$\Pr(\{PP\}) = \cdots = \Pr(\{FF\}) = 1/4.$$

Solution (diapositive 69)

Evénements élémentaires équiprobables

Sous l'hypothèse **d'équiprobabilité des événements élémentaires**, pour tout événement A de Ω,

$$\begin{aligned}\Pr(A) &= \frac{\text{nombre d'événements élémentaires dans } A}{\text{nombre total d'événements élémentaires dans } \Omega} \\ &= \frac{\text{nombre de cas favorables à } A}{\text{nombre total de cas possibles}}.\end{aligned}$$

Exemple Lancer d'un dé. **Supposons** que les six faces ont les mêmes chances d'apparaître (événements élémentaires équiprobables). Alors

$$\Pr(\{1\}) = \Pr(\{2\}) = \cdots = \Pr(\{6\}) = \frac{1}{6},$$

et

$$\begin{aligned}\Pr(\text{“obtenir un nombre pair”}) = \Pr(\{2,4,6\}) &= \Pr(\{2\}) + \Pr(\{4\}) + \Pr(\{6\}) \\ &= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Exemple Lancers de deux dés. Trouver $\Pr(\text{“la somme des faces vaut 7”})$.

Solution (diapositive 71)

Probabilité conditionnelle et indépendance

La probabilité que l'événement A se réalise peut être influencée par la réalisation d'un autre événement B. Pour formaliser cette idée, on introduit les concepts de probabilité conditionnelle et d'indépendance :

Définition: La **probabilité conditionnelle** de A sachant que B s'est réalisé est définie par

$$\Pr(A \mid B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}, \quad \text{si} \quad \Pr(B) > 0.$$

Définition: Deux événements A et B sont dits **indépendants** si $\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \times \Pr(B)$.

Intuition : si $\Pr(B) > 0$, c'est équivalent à

$$\Pr(A \mid B) = \Pr(A).$$

Probabilité conditionnelle

Exemples

Exemple Deux lancers d'une pièce de monnaie. Trouver la probabilité d'obtenir pile au 2ème lancer sachant qu'on a obtenu pile au 1er lancer.

Exemple : Lancer d'un dé Les événements $A = \{2, 4\}$ et $B = \{2, 4, 6\}$ sont-ils indépendants ?

Ne pas confondre indépendance et incompatibilité (A et B disjoints) !

Soient A, B disjoints tels que $\Pr(A), \Pr(B) > 0$. On a

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(\emptyset) = 0, \quad \text{mais} \quad \Pr(A) \times \Pr(B) \neq 0,$$

donc A et B sont dépendants. Donc

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \text{ et } B \text{ dépendants}, \quad \text{et ainsi}, \quad A \text{ et } B \text{ indépendants} \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset.$$

Par ailleurs

$$A \cap B \neq \emptyset \not\Rightarrow A \text{ et } B \text{ indépendants}.$$

Solution diapositive 75

Solution diapositive 75

Indépendance : généralisation

Définition: Les événements $A_1, \ldots, A_n$ sont **indépendants** si, pour tout sous-ensemble d'indices $\{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$, on a

$$\Pr\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{k} \Pr(A_{i_j}).$$

Exemple Un système de n composants est appelé **système en parallèle** s'il fonctionne dès qu'au moins un de ses composants fonctionne. Un **système en série** fonctionne si et seulement si tous ses composants fonctionnent.

(a) Si le $i$ème composant fonctionne indépendamment de tous les autres et avec une probabilité p_i, $i = 1, \ldots, n$, quelle est la probabilité de fonctionnement d'un système en parallèle ?

(b) Même question pour un **système en série**.

(c) Même question pour un **système composé**.

Solution diapositive 78

Solution diapositive 78

Formule des probabilités totales

Définition: Soit A un événement quelconque de Ω, et $\{B_i\}_{i=1,\ldots,n}$ une **partition** de Ω, c'est-à-dire,

$$B_i \cap B_j = \emptyset, \quad i \neq j, \qquad \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega.$$

La **formule des probabilités totales**

$$\mathrm{Pr}(A) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Pr}(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Pr}(A \mid B_i)\, \mathrm{Pr}(B_i).$$

Elle est également valide pour une partition infinie dénombrable.

Exemple Trois machines M_1, M_2 et M_3 fabriquent des pièces dans les proportions respectives 25%, 35% et 40%. On sait que respectivement 5%, 4% et 2% des pièces produites par M_1, M_2 et M_3 sont défectueuses. On choisit une pièce aléatoirement. Calculer

$$\mathrm{Pr}(\text{“la pièce est défectueuse”}).$$

Formule des probabilités totales : diagramme de Venn

Solution diapositive 81

Définissons les événements : $D =$ "la pièce est défectueuse" et pour $i = 1, 2, 3$, $A_i =$ "la pièce a été fabriquée par M_i".

Théorème de Bayes

Théorème de Bayes Soient $A \subseteq \Omega$ et $\{B_i\}_{i=1,\dots,n}$ une partition (éventuellement infinie dénombrable) de Ω. Si $\Pr(A) > 0$ alors on a, pour tout $i = 1, \dots, n$,

$$\Pr(B_i \mid A) = \frac{\Pr(B_i \cap A)}{\Pr(A)} = \frac{\Pr(A \mid B_i)\Pr(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} \Pr(A \mid B_j)\Pr(B_j)}.$$

- La formule de Bayes est très simple mais très utile, car elle permet une 'inversion du point de vue' dont on a souvent besoin en pratique.

Exemple Pour dépister une maladie, on applique un test. Si la maladie est présente, le test le découvre avec probabilité 0.99. Si la personne est saine, le test le trouve malade avec probabilité 0.02. Sachant qu'en moyenne un patient sur 1000 est atteint de la maladie, calculer la probabilité qu'un patient soit atteint sachant que son test a été positif. Comment améliorer ce resultat ?

Solution exemple Bayes

Soit M l'événement “le patient est atteint de la maladie”, M^c l'événement complémentaire, et A l'événement “le résultat du test est positif”.

Types d'indépendance

Les événements $A_1, \ldots, A_n$ sont **indépendants** si pour tout ensemble fini d'indices $F \subseteq \{1, \ldots, n\}$ qui est non-vide, on a

$$\Pr\left(\bigcap_{i \in F} A_i\right) = \prod_{i \in F} \Pr(A_i).$$

Définition: Les événements $A_1, \ldots, A_n$ sont **conditionnellement indépendants sachant** B si pour tout ensemble fini d'indices $F \subseteq \{1, \ldots, n\}$ qui est non-vide, on a

$$\Pr\left(\bigcap_{i \in F} A_i \mid B\right) = \prod_{i \in F} \Pr(A_i \mid B).$$

Exemples : indépendance conditionnelle

Exemple Une année donnée, la probabilité qu'un conducteur fasse une déclaration de sinistre à son assurance est μ, indépendamment des autres années. La probabilité pour une conductrice est de $\lambda < \mu$. Un assureur a le même nombre de conducteurs que de conductrices, et sélectionne une personne au hasard.

(a) Donner la probabilité que la personne déclare un sinistre cette année

(b) Donner la probabilité que la personne déclare des sinistres durant 2 années consécutives

(c) Si la compagnie sélectionne au hasard une personne ayant fait une déclaration, quelle est la probabilité que cette personne fasse une déclaration l'année suivante ?

(d) Montrer que la connaissance qu'une déclaration de sinistre ait été faite une année augmente la probabilité de déclarer un autre l'année suivante

Solution 87

2.2 Variables aléatoires

Définition

Exemple : lancer de deux dés. On s'intéresse à la somme obtenue plutôt qu'au fait de savoir si c'est le couple $\{1,6\}$, $\{2,5\}$, $\{3,4\}$, $\{5,2\}$ ou plutôt $\{6,1\}$ qui est apparu.

Après avoir effectué une expérience aléatoire, on s'intéresse davantage à une **fonction du résultat** qu'au résultat lui-même—c'est une variable aléatoire.

Définition: Soit Ω un ensemble fondamental. Une **variable aléatoire** définie sur Ω est une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$ (ou dans un sous-ensemble $H \subseteq \mathbb{R}$) :

$$X : \quad \begin{aligned} \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longrightarrow X(\omega), \end{aligned}$$

où ω est un événement élémentaire.

L'ensemble H des valeurs prises par la variable aléatoire X peut être **discret** ou **continu**. Par exemple :

- Nombre de piles obtenus en n lancers d'une pièce : $H = \{0, 1, \ldots, n\}$.
- Nombre d'appels téléphoniques pendant une journée : $H = \{0, 1, \ldots\}$.
- Temps d'attente au M1 : $H = [0, T_{\text{max}}]$.
- Quantité de pluie demain : $H = \mathbb{R}_+$.

Variables aléatoires discrètes

Définition: Une variable aléatoire X est dite **discrète** si elle prend un nombre fini ou dénombrable de valeurs. Dénotons $x_i, i = 1, 2, \ldots,$ les valeurs possibles de X. Alors la fonction

$$f_X(x_i) = \Pr(X = x_i)$$

est appelée **fonction de masse** (ou fonction des fréquences). Le comportement d'une variable aléatoire discrète X est complètement décrit par

- les valeurs $x_1, \ldots, x_k$ (k pas nécessairement fini) que X peut prendre ;
- les probabilités correspondantes

$$f_X(x_1) = \Pr(X = x_1), \ldots, f_X(x_k) = \Pr(X = x_k).$$

Fonction de masse

La **fonction de masse** f_X satisfait :

- $0 \leq f_X(x_i) \leq 1$, pour $i = 1, 2, \ldots$
- $f_X(x) = 0$, pour toutes les autres valeurs de x.
- $\sum_{i=1}^{k} f_X(x_i) = 1$.

Exemple On lance deux dés équilibrés. Trouver :
(a) la fonction de masse de la somme ; (b) la fonction de masse du maximum.

Solution 92 (a)

Solution 92 (b)

Fonction de répartition (cas discret ou continu)

Définition: La **fonction de répartition** F_X de la variable aléatoire (générale) X est

$$F_X(x) = \Pr(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Elle a les propriétés suivantes :

- F_X prend des valeurs dans $[0, 1]$
- F_X est continue à droite et monotone non décroissante, avec

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$$

- $\Pr(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$
- $\Pr(X > x) = 1 - F_X(x)$
- si X est discrète, alors

$$F_X(x) = \sum_{\{i:\ x_i \leq x\}} \Pr(X = x_i), x \in \mathbb{R}.$$

  et (sauf certains cas pathologiques) F_X est une fonction en escalier avec des sauts de taille $f_X(x_i)$ en x_i

Exemple Donner la fonction de répartition pour le maximum des résultats de deux dés.

Solution 95

Quelques notations (cas discret ou continu)

Par la suite, nous utilisons les notations suivantes :

- Les variables aléatoires sont notées en majuscules $(X, Y, Z, W, T, \ldots)$.
- Les valeurs possibles des variables aléatoires sont notées en minuscules $(x, y, z, w, t, \ldots \in \mathbb{R})$.
- La fonction de répartition d'une variable aléatoire X est notée F_X.
- La fonction de masse (ou de densité dans le cas continu, cf plus loin) d'une variable aléatoire X est notée f_X.
- Ces dernières sont notées F ou f s'il n'y pas de risque de confusion.
- $X \sim F$ signifie "la variable aléatoire X suit la loi F, i.e., admet F pour fonction de répartition".
- $X \overset{\text{app}}{\sim} F$ signifie "la variable aléatoire X suit approximativement la loi F".

Loi de Bernoulli

Définition: Une **variable aléatoire de Bernoulli** satisfait

$$X = \begin{cases} x_1 = 0 & \text{si échec} \quad \text{probabilité } 1-p, \\ x_2 = 1 & \text{si succès} \quad \text{probabilité } p; \end{cases}$$

on écrit $X \sim \mathcal{B}(p)$. Sa loi de probabilité est donc

x_i	0	1	Total
$f_X(x_i) = \mathrm{Pr}(X = x_i)$	$1-p$	p	1

où p est la probabilité de succès.
Exemple du lancer d'une pièce de monnaie avec probabilité p fixée d'obtenir "Pile".

Loi binomiale

Définition: On effectue m fois indépendamment une expérience qui mène soit à un succès (avec probabilité p) soit à un échec (avec probabilité $1-p$). Soit X le nombre de succès obtenus. Alors on écrit $X \sim \mathcal{B}(m,p)$, et

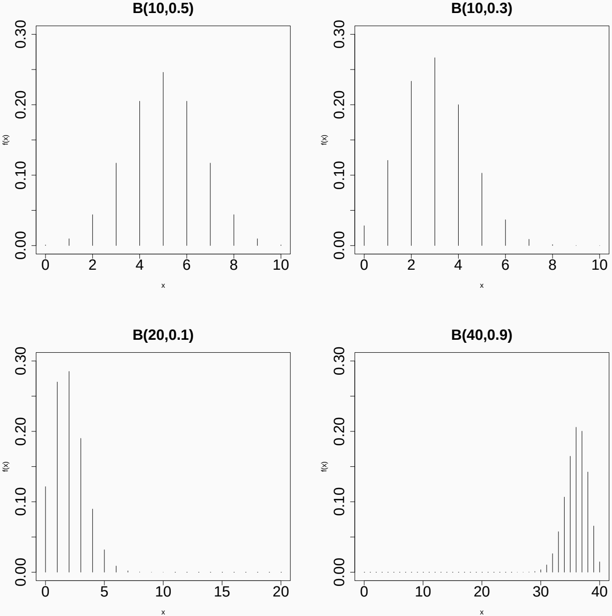
$$f_X(x) = \binom{m}{x} p^x (1-p)^{m-x}, \qquad x = 0, \ldots, m.$$

Ceci est la **loi binomiale** avec nombre d'essais m et probabilité p. Dans le cas $m = 1$, X est une variable de Bernoulli. m s'appelle **dénominateur** et p **probabilité de succès**.

Exemple : m lancers indépendants d'une pièce de monnaie avec $\mathrm{Pr}(\text{“Pile”}) = p$ fixée.

Exemple Trouver la loi du nombre X de personnes présentes à ce cours ayant leur anniversaire ce mois-ci.

Fonctions de masse binomiale



Solution Exemple 99

Variable aléatoire de Poisson

Définition: Une variable aléatoire X pouvant prendre pour valeurs $0, 1, 2, \ldots$ est dite de **Poisson** avec paramètre $\lambda > 0$ si

$$f_X(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, \quad x \in \{0, 1, 2, \ldots\}, \quad \lambda > 0.$$

On écrit $X \sim \text{Poiss}(\lambda)$. λ représnte la "moyenne" (l'espérance, cf. plus tard)

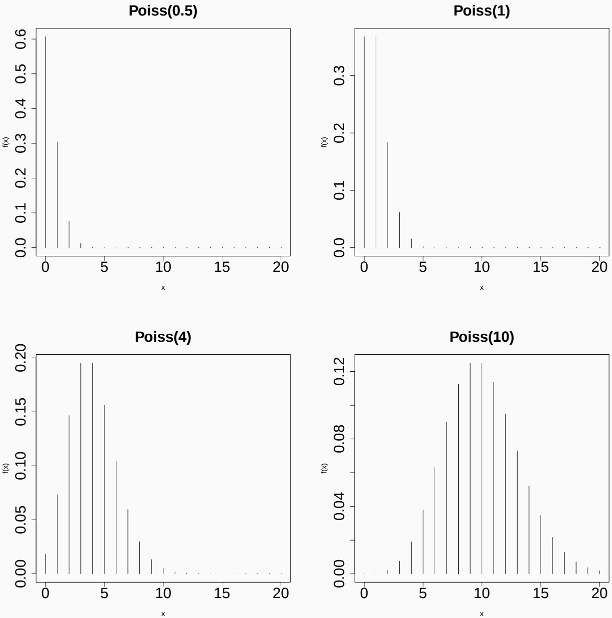
Applications :

- nombre d'appels téléphoniques par minute dans une centrale téléphonique
- nombre de fautes de frappe dans les notes de cours
- nombre d'avalanches mortelles en Suisse cet hiver

Exemple : E. coli Le niveau residuel des bactéries E. coli dans l'eau traitée est de $2/100$ ml, en moyenne. (a) Trouver la probabilité qu'il y ait $k = 0, 1, 2, 3$ présent dans un échantillon de 200 ml d'eau.

(b) Si on en trouve 10 dans un tel échantillon, l'eau est-elle bonne ?

Fonctions de masse Poisson



Solution Exemple 102

Approximation poissonienne de la loi binomiale

Soit $X \sim \mathcal{B}(m, p)$ avec m grand et p petit. Alors

$$X \overset{\text{app}}{\sim} \text{Poiss}(\lambda = mp).$$

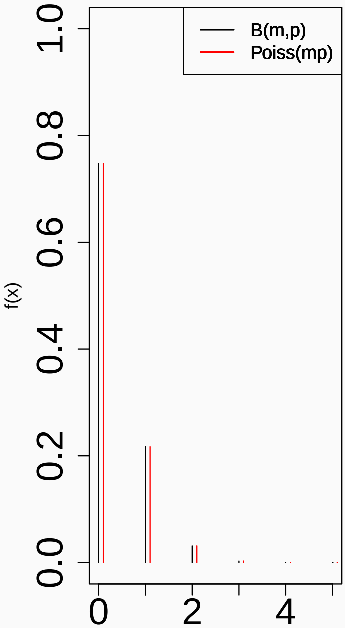
Ceci s'appelle parfois la **loi des petits nombres**.

Exemple D'après IS-Academia, vous êtes m étudiant(e)s.

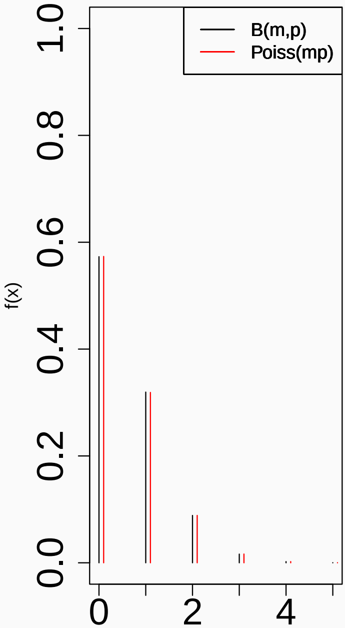
Soit X le nombre de personnes parmi vous dont l'anniversaire a lieu aujourd'hui.

Calculer les probabilités que $X = 0$, $X = 1$, et $X > 1$, sous la loi binomiale et son approximation poissonienne.

$m = 106, p = 1/365$



$m = 203, p = 1/365$



Variables aléatoires continues

Définition: On dit qu'une variable aléatoire X est **continue** s'il existe une fonction $f_X : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ appelée **fonction de densité** telle que

$$\mathrm{Pr}(X \in A) = \int_A f_X(u)\mathrm{d}u,$$

où $A \subseteq \mathbb{R}$ est un ensemble 'raisonnable'. Par exemple, pour $A = (a, b]$,

$$\mathrm{Pr}(X \in A) = \mathrm{Pr}(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x)\mathrm{d}x.$$

f_X **n'est pas** une probabilité, mais une limite

$$f_X(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{2h} \mathrm{Pr}(x - h \leq X \leq x + h)$$

Une variable continue peut prendre une infinité des valeurs, souvent dans un intervalle (borné, demi-droite, ou tout $\mathbb{R}$).

Fonctions de densité et de répartition : propriétés

- Propriétés de la **fonction de densité** :
  - $f_X(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;
  - $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\mathrm{d}x = 1$.
- Si l'on pose $a = b$, on a

$$\Pr(X = a) = \int_a^a f_X(x)\mathrm{d}x = 0.$$

- La **fonction de répartition**, F_X, vérifie

$$F_X(a) = \Pr(X \leq a) = \Pr(X < a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)\mathrm{d}x, \quad a \in \mathbb{R}.$$

- On a, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$,

$$\Pr(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \Pr(a < X < b).$$

- On a

$$f_X(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_X(x) = F_X'(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Quelques lois continues

- **Loi uniforme** : $X \sim U(a,b)$, pour $a < b$, de densité

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & \text{si } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- **Loi exponentielle** : $X \sim \exp(\lambda)$, pour $\lambda > 0$, de densité

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- **Loi normale** : $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, pour $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$, de densité

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $Z = (X-\mu)/\sigma \sim \mathcal{N}(0,1)$ ("standardisation").
Notations : $f_Z(z) = \phi(z)$ et $F_Z(z) = \Phi(z)$.

Quelques lois continues

Exemple

Exemple Le M1 passe toutes les 5.5 minutes. Si j'arrive à un moment choisi au hasard, quelle est la probabilité que je doive attendre (a) plus de 3 minutes ? (b) moins de 2 minutes ? (c) entre 1 et 4 minutes ?

Exemple

Exemple La probabilité qu'il pleuve pendant la journée est de 0.2. S'il pleut, la quantité de pluie journalière suit une loi exponentielle de parametre $\lambda = 0.05$ mm^{-1}. Trouver (a) la probabilité qu'il tombe au plus 5mm demain, (b) la probabilité qu'il tombe au moins 2mm demain.

Exemple La quantité annuelle de pluie dans une certaine région est une variable aléatoire normale de moyenne $\mu = 140$ cm et de variance $\sigma^2 = 16$ cm^2. Quelle est la probabilité qu'il tombe entre 135 et 150 cm ?

2.2.3 Variables aléatoires conjointes

Variables aléatoires conjointes / simultanées

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même ensemble Ω. La **fonction de répartition conjointe (ou simultanée)** de X et Y est définie par

$$F_{X,Y}(x,y) = \Pr(X \leq x,\ Y \leq y), \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

- **Cas discret** (i.e., X et Y sont discrètes) : la loi de probabilité conjointe de X et Y est parfaitement déterminée si l'on connaît leur **fonction de masse conjointe**, i.e.,

  $$f_{X,Y}(x_i, y_j) = \Pr(X = x_i, Y = y_j)$$

  pour tous les couples (x_i, y_j) possibles.
- **Cas continu** (i.e., X et Y sont continues) : la loi de probabilité conjointe de X et Y est parfaitement déterminée si l'on connaît leur **fonction de densité conjointe**, définie (si elle existe) par

  $$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y}, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Cas discret : propriétés

- Propriétés de la fonction de masse conjointe :
  - $0 \leq f_{X,Y}(x_i, y_j) \leq 1, i, j = 1, 2, \ldots$
  - $f_{X,Y}(x, y) = 0$, pour toutes les autres valeurs de x et y.
  - $\sum_{i,j} f_{X,Y}(x_i, y_j) = 1$.

- La fonction de répartition conjointe vérifie

$$F_{X,Y}(x, y) = \sum_{\{(i,j):\ x_i \leq x, y_j \leq y\}} f_{X,Y}(x_i, y_j), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Cas continu : propriétés

- Propriétés de la densité conjointe :
  - $f_{X,Y}(x,y) \geq 0, \quad x,y \in \mathbb{R}$.
  - $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u,v) \mathrm{d}v \mathrm{d}u = 1$.
- La fonction de répartition conjointe vérifie

$$F_{X,Y}(x,y) = \Pr(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v) \mathrm{d}v \mathrm{d}u, \quad x,y \in \mathbb{R}$$

- On a, pour tout $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ tels que $a_1 < b_1$ et $a_2 < b_2$,

$$\Pr(a_1 < X \leq b_1,\ a_2 < Y \leq b_2) = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f_{X,Y}(u,v) \mathrm{d}v \mathrm{d}u.$$

Lois marginales

Définition: Soient X, Y deux variables aléatoires ayant pour densité (ou fonction de masse) conjointe $f_{X,Y}$. Les **densités marginales** du couple (X, Y) sont respectivement les densités de X et Y, i.e., f_X et f_Y. De même, les **fonctions de répartition marginales** du couple (X, Y) sont respectivement les fonctions de répartition de X et Y, i.e., F_X et F_Y.

Dans le cas des densités, on a

- **cas discret** : $f_X(x_i) = \sum_j f_{X,Y}(x_i, y_j), \quad f_Y(y_j) = \sum_i f_{X,Y}(x_i, y_j);$
- **cas continu** : $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\mathrm{d}y, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\mathrm{d}x.$

Concernant les fonctions de répartition, on a

- **cas discret** : $F_X(x) = \sum_{\{i:x_i \leq x\}} f_X(x_i), \quad F_Y(y) = \sum_{\{j:y_j \leq y\}} f_Y(y_j);$
- **cas continu** : $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,\mathrm{d}u, \quad F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(v)\,\mathrm{d}v.$

Exemple X, Y prennent les valeurs $(1,2), (1,4), (2,3), (3,2), (3,4)$ avec probabilités égales. Trouver les lois marginales de X et de Y.

Solution 118 et 120

Exemple X, Y prennent les valeurs $(1,2),(1,4),(2,3),(3,2),(3,4)$ avec probabilités égales. Trouver les lois marginales de X et de Y.

Indépendance

Définition: Deux variables aléatoires X et Y sont **indépendantes** si

$$\Pr(X \leq x,\ Y \leq y) = \Pr(X \leq x) \times \Pr(Y \leq y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Dans ce cas on écrit $X \perp\!\!\!\perp Y$.

- Donc $X \perp\!\!\!\perp Y \iff \forall x, y \in \mathbb{R} : F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$
- si $X \perp\!\!\!\perp Y$ et f_X, f_Y sont connues, on peut obtenir $f_{X,Y}$. Ceci est **faux** pour des variables dépendantes
- si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $g(X) \perp\!\!\!\perp h(Y)$ pour toutes fonctions g, h 'raisonnables'
- Pour des variables aléatoires **discrètes**

  $$\forall x, y \in \mathbb{R} : f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)\times f_Y(y) \iff \forall x, y \in \mathbb{R} : F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)\times F_Y(y)$$

- Pour des variables aléatoires **continues** $\Longrightarrow$ est vrai et pour montrer une **dépendance** il suffit de trouver x, y auxquels $f_{X,Y}$, f_X et f_Y sont continues et $f_{X,Y}(x, y) \neq f_X(x) \times f_Y(y)$

Exemple Les variables aléatoires X, Y de l'exemple précédant sont-elles indépendantes ?

Cas continu

La fonction de répartition conjointe est

$$\Pr(X \leq x,\ Y \leq y) = F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f_{X,Y}(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Propriétés :

- $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 1$
- $f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x\,\partial y}$
- $\Pr(a_1 < X \leq b_1,\ a_2 < Y \leq b_2) = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f_{X,Y}(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$
- Plus généralement, pour $A \subseteq \mathbb{R}^2$ 'raisonnable'

$$\Pr((X,Y) \in A) = \int_A f_{X,Y}(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Exemple Soient $X \sim U[0,1]$ et $Y \sim U[0,2]$ indépendantes. Trouver $\Pr(X > Y)$.

Noter : $Y' = 2X \sim U[0,2]$ mais $\Pr(X > Y') = 0$; X et Y' sont dépendantes !

Solution 121

Densité conditionelle

Définition: La **densité conditionnelle** de X sachant $Y = y$ (tel que $f_Y(y) > 0$) est définie par

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Si X et Y sont indépendantes, on a

$$f_{X|Y}(x \mid y) = f_X(x), \quad f_{Y|X}(y \mid x) = f_Y(y), \quad \text{pour tout } x \text{ et } y \in \mathbb{R}.$$

(mathématiquement, c'est pour 'presque' tout x, y)

Exemple Soient X et Y de densité conjointe

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x + y & \text{si} \quad 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver les densités marginales de X et Y, et la densité conditionnelle $f_{X|Y}$. Les deux variables sont-elles indépendantes ?

Solution Exemple 123