Corrigé 7

Exercice 1. (a) Il s'agit d'une variable discrète, et pour une variable discrète on a

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x_i} \big(x_i \cdot \Pr(X = x_i)\big),$$

où les x_i sont toutes les valeurs que X peut prendre. Une variable Bernoulli peut prendre les valeurs 0 et 1, et $\Pr(X = 0) = 1 - p$ tandis que $\Pr(X = 1) = p$. On obtient donc

$$\mathbb{E}[X] = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p.$$

Pour calculer la variance on utilise la formule

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2.$$

Pour une variable discrète on a

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{x_i} \big(x_i^2 \cdot \Pr(X = x_i)\big),$$

donc

$$\mathbb{E}[X^2] = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p, \quad \text{et } \mathrm{Var}[X] = p - p^2 = p(1 - p).$$

(b) Il s'agit d'une variable continue, et pour une variable continue on a

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{\mathbb{R}} y \cdot f(y)\,\mathrm{d}y,$$

où f est la densité de Y. Ici

$$\mathbb{E}[Y] = \int_0^1 5\,y^5\,\mathrm{d}y = \left[\frac{5}{6}\,y^6\right]_0^1 = \frac{5}{6}.$$

Pour calculer la variance on utilise la formule

$$\mathrm{Var}[Y] = \mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[Y])^2.$$

Pour une variable continue on a

$$\mathbb{E}[Y^2] = \int_{\mathbb{R}} y^2 \cdot f(y)\,\mathrm{d}y,$$

donc

$$\mathbb{E}[Y^2] = \int_0^1 5\,y^6\,\mathrm{d}y = \left[\frac{5}{7}\,y^7\right]_0^1 = \frac{5}{7}, \quad \text{et } \mathrm{Var}[Y] = \frac{5}{7} - \frac{25}{36} = \frac{5}{252}.$$

(c) Il s'agit d'une variable discrète, donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z] &= \sum_{z_i} z_i \cdot \Pr(Z = z_i) = \sum_{i=1}^{6} i \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^{6} i = \frac{1}{6} \cdot \frac{6 \cdot 7}{2} = \frac{7}{2},\\
\mathbb{E}[Z^2] &= \sum_{z_i} z_i^2 \cdot \Pr(Z = z_i) = \sum_{i=1}^{6} i^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1+4+9+16+25+36}{6} = \frac{91}{6},\\
\mathrm{Var}[Z] &= \mathbb{E}[Z^2] - (\mathbb{E}[Z])^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}.
\end{aligned}$$

(d) Il s'agit d'une variable continue de densité $f(w) = F'(w) = 4\,w^{-5}$ si $w > 1$, et $f(w) = 0$ sinon. Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[W] &= \int_{\mathbb{R}} w \cdot f(w)\,\mathrm{d}w = \int_1^{\infty} 4\,w^{-4}\,\mathrm{d}w = \left[-\frac{4}{3}\,w^{-3}\right]_1^{\infty} = \frac{4}{3}, \\
\mathbb{E}[W^2] &= \int_{\mathbb{R}} w^2 \cdot f(w)\,\mathrm{d}w = \int_1^{\infty} 4\,w^{-3}\,\mathrm{d}w = \left[-\frac{4}{2}\,w^{-2}\right]_1^{\infty} = 2, \\
\mathrm{Var}[W] &= \mathbb{E}[W^2] - (\mathbb{E}[W])^2 = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}.
\end{aligned}$$

Exercice 2. X est une variable exponentielle. Il s'agit d'une variable continue, et pour une variable continue on a

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x)\,\mathrm{d}x,$$

où $f(x)$ est la densité de X et $g(x)$ est une fonction. En utilisant le fait que $\lambda > 2$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mathrm{e}^X] &= \int_0^{\infty} e^x \cdot \lambda\, e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \lambda \cdot \int_0^{\infty} e^{-(\lambda-1)\,x}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\lambda}{\lambda-1} e^{-(\lambda-1)\,x}\right]_0^{\infty} = \frac{\lambda}{\lambda-1}, \\
\mathbb{E}\big[\left(\mathrm{e}^X\right)^2\big] &= \mathbb{E}\big[\mathrm{e}^{2X}\big] = \int_0^{\infty} e^{2x} \cdot \lambda\, e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \lambda \cdot \int_0^{\infty} e^{-(\lambda-2)\,x}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\lambda}{\lambda-2} e^{-(\lambda-2)\,x}\right]_0^{\infty} = \frac{\lambda}{\lambda-2}, \\
\mathrm{Var}[\mathrm{e}^X] &= \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^X\right)^2 - \left(\mathbb{E}\mathrm{e}^X\right)^2 = \frac{\lambda}{\lambda-2} - \frac{\lambda^2}{(\lambda-1)^2}.
\end{aligned}$$

Exercice 3. (i). Ici $\Omega = \{(r,g) : r, g \in \{1,\dots,4\}\}$, ainsi $\omega = (r,g)$ et $\Pr(\omega) = 1/16$ pour chaque $\omega \in \Omega$

(ii). On a somme et maximum

$$S(\omega) = r + g, \quad M(\omega) = \max(r,g),$$

dont on répresente les valeurs possibles par le tableau ci-dessous, dans lequel s/m donne les valeurs de $S(\omega)$ et $M(\omega)$ pour $\omega = (r,g)$.

	g			
r	1	2	3	4
1	2/1	3/2	4/3	5/4
2	3/2	4/2	5/3	6/4
3	4/3	5/3	6/3	7/4
4	5/4	6/4	7/4	8/4

Leur loi conjointe est ainsi donnée par le tableau suivant, qui contient les valeurs de $f_{M,S}(m,s)$:

	s						
m	2	3	4	5	6	7	8
1/16	1/16	0	0	0	0	0	0
2/16	0	2/16	1/16	0	0	0	0
3/16	0	0	2/16	2/16	1/16	0	0
4/16	0	0	0	2/16	2/16	2/16	1/16

Les zéros sont utiles pour montrer une dépendance : par exemple $\Pr(M = 1, S = 3) = 0 < \Pr(M = 1)\Pr(S = 3)$. Ainsi S et M ne sont pas indépendantes. Autre exemple : $\Pr(M = 2)\Pr(S = 4) = 3/16 \times 3/16 \neq \Pr(M = 2, S = 4) = 1/16$.

(iii). La fonction de masse conditionnelle de S sachant que $M = 4$ est

$$f_S(5 \mid M = 4) = f_S(6 \mid M = 4) = f_S(7 \mid M = 4) = 2/7, \quad f_S(8 \mid M = 4) = 1/7,$$

et zéro pour $s \notin \{5, 6, 7, 8\}$.

(iv). La fonction de masse marginale de M est

$$f_M(m) = \begin{cases} 1/16, & m = 1, \\ 3/16, & m = 2, \\ 5/16, & m = 3, \\ 7/16, & m = 4, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 4. On a $\mathbb{E}[Z_1] = (1/2)\mathbb{E}Y_1 + \mathbb{E}Y_2 = 1/2 + 2 = 5/2$, $\mathbb{E}Z_2 = \frac{1}{2}\mathbb{E}Y_2 - \frac{1}{2}\mathbb{E}Y_3 = 2/2 - 3/2 = -1/2$ et $\mathbb{E}Z_3 = (1/3)(\mathbb{E}Y_1 + \mathbb{E}Y_2 + \mathbb{E}Y_3) = 6/3 = 2$. Pour X et Y indépendantes, $\operatorname{Var}(aX + bY) = a^2 \operatorname{Var}(X) + b^2 \operatorname{Var}(Y)$, et comme les Y_i sont toutes indépendantes, cette formule s'applique et $\operatorname{Var} Z_1 = \operatorname{Var} Y_1/4 + \operatorname{Var} Y_2 = 1/4 + 2 = 9/4$, $\operatorname{Var} Z_2 = (\operatorname{Var} Y_2 + \operatorname{Var} Y_3)/4 = (2+3)/4 = 5/4$ et $\operatorname{Var} Z_3 = (1/9)(\operatorname{Var} Y_1 + \operatorname{Var} Y_2 + \operatorname{Var} Y_3) = (1+2+3)/9 = 2/3$.

Pour les corrélations on calcule d'abord les covariances. On a

$$\operatorname{Cov}(Z_1, Z_2) = \operatorname{Cov}(Y_1/2 + Y_2, Y_2/2 - Y_3/2) = \operatorname{Cov}(Y_1/2, Y_2/2) + \operatorname{Cov}(Y_2, Y_2/2) + \operatorname{Cov}(Y_1/2, Y_3/2) + \operatorname{Cov}(Y_2, Y_3/2$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Cov}(Y_1, Y_2) + \frac{1}{2}\operatorname{Cov}(Y_2, Y_2) + \frac{1}{4}\operatorname{Cov}(Y_1, Y_3) + \frac{1}{2}\operatorname{Cov}(Y_2, Y_3) = 0 + \frac{1}{2}\operatorname{Var}(Y_2) + 0 + 0 = 1$$

De manière similaire

$$\operatorname{Cov}(Z_1, Z_3) = \operatorname{Cov}(Y_1/2 + Y_2, Y_1/3 + Y_2/3 + Y_3/3) = \frac{1}{6}\operatorname{Var} Y_1 + \frac{1}{3}\operatorname{Var} Y_2 = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$$

et

$$\operatorname{Cov}(Z_2, Z_3) = \operatorname{Cov}(Y_2/2 - Y_3/2, Y_1/3 + Y_2/3 + Y_3/3) = \frac{1}{6}\operatorname{Var} Y_2 - \frac{1}{6}\operatorname{Var} Y_3 = \frac{2}{6} - \frac{3}{6} = -\frac{1}{6}$$

Donc les corrélations sont

$$\operatorname{Cor}(Z_1, Z_2) = \frac{\operatorname{Cov}(Z_1, Z_2)}{\sqrt{\operatorname{Var}(Z_1)\operatorname{Var}(Z_2)}} = 1/\sqrt{9/4 * 5/4} = 4/3\sqrt{5} = 4\sqrt{5}/15$$

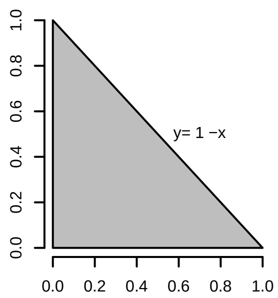
$$\operatorname{Cor}(Z_1, Z_3) = \frac{\operatorname{Cov}(Z_1, Z_3)}{\sqrt{\operatorname{Var}(Z_1)\operatorname{Var}(Z_3)}} = (5/6)/\sqrt{9/4 * 2/3} = 5\sqrt{12}/6\sqrt{18} = 5\sqrt{6}/18$$

$$\operatorname{Cor}(Z_2, Z_3) = \frac{\operatorname{Cov}(Z_2, Z_3)}{\sqrt{\operatorname{Var}(Z_2)\operatorname{Var}(Z_3)}} = -(1/6)/\sqrt{5/4 * 2/3} = -\sqrt{12}/6\sqrt{10} = -\sqrt{30}/30$$

Exercice 5. (a) On a bien $f(x,y) \geq 0$ pour tout x et y. De plus il faut que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1.$$

Dans notre cas l'ensemble $A = \{(x,y);\ f(x,y) > 0\}$ est un peu compliqué, donc il faut être prudent en spécifiant les bornes des deux intégrales. En fait, l'ensemble A est la



partie grise sur le dessin ci-dessus. Donc, on a $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1\int_0^{1-y} 24xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

$$\int_0^1\int_0^{1-y} 24xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 24y\left(\int_0^{1-y} x\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_0^1 24y\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{1-y}\mathrm{d}y = \int_0^1 12y(1-y)^2\,\mathrm{d}y = 1,$$

et on voit bien que $f(x,y)$ est une densité.

(b) La densité marginale de X est

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

De nouveau, il faut être prudent en spécifiant les bornes de l'intégrale. On a

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_0^{1-x} 24xy\,\mathrm{d}y = 12x(1-x)^2 \quad \text{si } x \in [0,1],$$

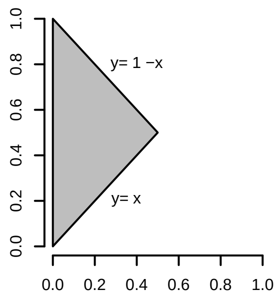
et $f_X(x) = 0$ sinon. Par symétrie on a également $f_Y(y) = 12y(1-y)^2$ si $y \in [0,1]$ et $f_Y(y) = 0$ sinon.

(c) X et Y ne sont pas indépendantes car $f_X(x)f_Y(y) \neq f(x,y)$. En fait, on peut voir cela directement de la forme de A. Si la région $\{(x,y);\ f(x,y) > 0\}$ n'est pas rectangulaire, les deux variables ne peuvent pas être indépendantes.

(d)

$$\Pr(X < Y) = \iint_{\{(x,y);\,x<y\}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Pour calculer cette intégrale on veut intégrer $24xy$ dans la région ci-dessous.



On obtient

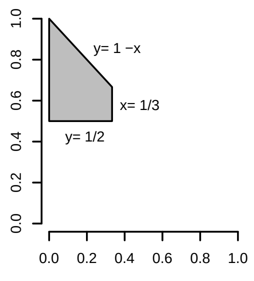
$$\begin{aligned}
\Pr(X<Y) &= \int_0^{1/2}\int_0^y 24xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{1/2}^1\int_0^{1-y} 24xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&= \int_0^{1/2} 24y\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^y \mathrm{d}y + \int_{1/2}^1 24y\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{1-y}\mathrm{d}y\\
&= \int_0^{1/2} 12y^3\,\mathrm{d}y + \int_{1/2}^1 12y(1-y)^2\,\mathrm{d}y\\
&= \frac{3}{16}+6-8+3-\frac{6}{4}+\frac{8}{8}-\frac{3}{16}=\frac{1}{2},
\end{aligned}$$

ce qui peut être aussi deviné directement par la symétrie du problème.

(e) D'après la définition on a

$$\Pr(X<1/3\,|\,Y>1/2)=\frac{\Pr(X<1/3,\,Y>1/2)}{\Pr(Y>1/2)}.$$

Pour calculer $\Pr(X<1/3,\,Y>1/2)$ on intègre $24xy$ dans la région ci-dessous.



On a donc

$$\begin{aligned}
\Pr(X < 1/3,\, Y > 1/2) &= \int_{1/2}^{2/3}\int_0^{1/3} 24xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{2/3}^{1}\int_0^{1-y} 24xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{1/2}^{2/3} 24y\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{1/3}\mathrm{d}y + \int_{2/3}^{1} 24y\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{1-y}\mathrm{d}y \\
&= \int_{1/2}^{2/3} \frac{12}{9}y\,\mathrm{d}y + \int_{2/3}^{1} 12y(1-y)^2\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{8}{27} - \frac{1}{6} + 6 - 8 + 3 - \frac{24}{9} + \frac{64}{27} - \frac{48}{81} = \frac{13}{54}.
\end{aligned}$$

De plus,

$$\Pr(Y > 1/2) = \int_{1/2}^{1} 12y(1-y)^2\,\mathrm{d}y = 6 - 8 + 3 - \frac{6}{4} + \frac{8}{8} - \frac{3}{16} = \frac{5}{16}.$$

Donc

$$\Pr(X < 1/3 \,|\, Y > 1/2) = \frac{13\times 16}{54\times 5} = \frac{104}{135}.$$

(f) Pour la densité conditionnelle de Y sachant $X = x \in (0,1)$, on a

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{24xy}{12x(1-x)^2} = \frac{2y}{(1-x)^2}$$

pour $0 \le y \le 1-x$ et $f_{Y|X}(y|x) = 0$ autrement.

(g) On a

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = \int_0^1 12x^2(1-x)^2 dx = 12\left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5}\right) = \tfrac{2}{5}.$$

De même $\mathbb{E}[Y] = \frac{2}{5}$ par symétrie. Finalement,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[XY] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^1\int_0^{1-y} 24x^2y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 8(1-y)^3y^2\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{8}{3} - 6 + \frac{24}{5} - \frac{4}{3} = \frac{2}{15}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \frac{2}{15} - \frac{4}{25} = -\frac{2}{75}.$$

Exercice 6. (i). Nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \int_0^{30} t\cdot f_Y(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{30} t\cdot\frac{1}{30}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{30}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{30} \\
&= \frac{30}{2} = 15.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y) &= \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2\\ &= \int_0^{30} t^2 \cdot f_Y(t)\mathrm{d}t - 15^2\\ &= \int_0^{30} t^2 \cdot \frac{1}{30}\mathrm{d}t - 15^2\\ &= \frac{1}{30}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{30} - 15^2\\ &= 30^2/12 = 75.\end{aligned}$$

Ainsi l'espérance de l'heure d'arrivée de Juliette est 21h05 et sa variance vaut 75 min^2.

(ii). La fonction de densité conjointe est $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{30}$ si $x \in [\,5\,,\,15\,]$ et $y \in [\,0\,,\,30\,]$ (par hypothèse d'indépendance). Ainsi :

$$\Pr\{X < Y\} = \int_5^{15}\int_x^{30} f_X(x)f_Y(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{1}{300}\int_5^{15}(30-x)\mathrm{d}x = \frac{2}{3}.$$

(iii). Il faut calculer :

$$\int_5^{15}\int_{x-5}^{x+5} f_X(x)f_Y(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{1}{300}\int_5^{15} 10\mathrm{d}x = \frac{1}{3}.$$

Exercice 7. Soient X_1, X_2, X_3, X_4 les temps de service des quatre clients, alors $D = X_1 + X_2 + X_3$.

(i). $\mathbb{E}(D) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \mathbb{E}(X_3) = 3 \cdot 2 = 6$.
$\mathrm{Var}(D) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) + \mathrm{Var}(X_3) = 3 \cdot 2^2 = 12$ (indépendants).

(ii). Le service le plus court est décrit par la variable aléatoire $\min(X_1, X_2, X_3, X_4)$, sa loi se calcule de la façon suivante :

$$\begin{aligned}P\left\{\min(X_1,X_2,X_3,X_4) \le t\right\} &= 1 - P\left\{\min(X_1,X_2,X_3,X_4) > t\right\}\\ &= 1 - \prod_{i=1}^{4} P\{X_i > t\} = 1 - (e^{-\frac{1}{2}t})^4 = 1 - e^{-2t}.\end{aligned}$$

Ainsi $\min(X_1, X_2, X_3, X_4) \sim \exp(2)$.