CORRIGÉ 5

Exercice 1. — Pour une page donnée, la probabilité que la $i$me faute de frappe se trouve sur cette page est $1/350$. Comme il y a 450 fautes de frappes qui sont supposées indépendantes l'une de l'autre, on doit considérer une variable $X \sim B(m = 450, p = 1/350)$. On peut donc écrire

$$\Pr(X = x) = \binom{450}{x} p^x (1-p)^{450-x}, \quad x = 0, \ldots, 450.$$

Donc,

$$\Pr(X \geq 3) = 1 - \Pr(X \leq 2) = 1 - \sum_{i=0}^{2} \binom{450}{i} \left(\frac{1}{350}\right)^i \left(1 - \frac{1}{350}\right)^{n-i} \approx 0.14.$$

— Comme m est large et p est petit, on peut aussi approximer la variable binomiale X par une autre variable aléatoire Y suivant la loi Poisson de paramètre $\lambda = mp = 1.29$ (voir Slides 98) et on obtient

$$\Pr(Y \geq 3) = 1 - \Pr(Y \leq 2) = 1 - \exp(-\lambda)(1 + \lambda + \lambda^2/2) \approx 0.14.$$

Exercice 2. La dernière, car les deux autres fonctions ne satisfont pas la condition $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Il s'agit de la loi uniforme $\mathrm{U}(0,1)$.

Exercice 3. (a)

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 3/x^4 & \text{pour } x \geq 1, \\ 0 & \text{pour } x < 1. \end{cases}$$

(b) $f(x) = F'(x) = \mathrm{e}^{-x}/(1 + \mathrm{e}^{-x})^2$ pour $x \in \mathbb{R}$.

(c)

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} \frac{(\alpha+\beta-1)!}{(\alpha-1)!\,(\beta-1)!}\, x^{\alpha-1}\,(1-x)^{\beta-1} & \text{pour } x \in (0,1), \\ 0 & \text{pour } x \notin (0,1). \end{cases}$$

Exercice 4. (a)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi\,(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\arctan(x) + \frac{1}{2} \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}.$$

(b)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0 & \text{pour } x < 0, \\ \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_0^x k\,t^{k-1}\mathrm{e}^{-t^k}\,\mathrm{d}t = 1 - \mathrm{e}^{-x^k} & \text{pour } x \geq 0. \end{cases}$$

(c)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0 & \text{pour } x \leq 0, \\ \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_0^x 4\,t^3\,\mathrm{d}t = x^4 & \text{pour } x \in (0,1), \\ \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_0^1 4\,t^3\,\mathrm{d}t + \int_1^x 0\,\mathrm{d}t = 1 & \text{pour } x \geq 1. \end{cases}$$

Exercice 5.

- Le premier et le dernier graphique représentent des fonctions de répartition de lois discrètes.
- Le deuxième et le troisième représentent des fonctions de répartition de lois continues.
- Le quatrième graphique représente une fonction de répartition d'une loi qui est ni discrète, ni continue (c'est en fait une loi mixte).
- La fonction représentée sur le cinquième graphique n'est pas une fonction de répartition, car elle n'est pas croissante.

La fonction de répartition correspondant à la densité de l'exercice 1 est la troisième fonction de répartition de cet exercice.

Exercice 6. (a) On sait que

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{1} 0\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{\infty} c\,x^{-4}\,\mathrm{d}x = 0 + c\left[-\frac{1}{3\,x^3}\right]_1^{\infty} = \frac{c}{3}.$$

Donc $c = 3$.

(b) La loi est la même que dans la partie (a) de l'exercice 2.

(c)

$$\begin{aligned}
\Pr(X < 1) &= \int_{-\infty}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{1} 0\,\mathrm{d}x = 0.\\
\Pr(X > 1) &= \int_{1}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{\infty} 3\,x^{-4}\,\mathrm{d}x = 1.\\
\Pr(1 < X \le 2) &= \int_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{2} 3\,x^{-4}\,\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.\\
\Pr(X \le 2) &= \int_{-\infty}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{1} 0\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} 3\,x^{-4}\,\mathrm{d}x = \frac{7}{8}.\\
\Pr(0 < X \le 3) &= \int_{0}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} 0\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{3} 3\,x^{-4}\,\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{27} = \frac{26}{27}.
\end{aligned}$$

(d) D'après la définition de la probabilité conditionnelle, on a

$$\Pr(X > 2 \,|\, X < 3) = \frac{\Pr(2 < X < 3)}{\Pr(X < 3)} = \frac{\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_{-\infty}^3 f(x)\,\mathrm{d}x} = \frac{\int_2^3 3\,x^{-4}\,\mathrm{d}x}{\int_1^3 3\,x^{-4}\,\mathrm{d}x} = \frac{1/8 - 1/27}{1 - 1/27} = \frac{19}{208}.$$

Exercice 7. (a) Il s'agit de la loi exponentielle $\exp(1/10)$.

(b)

$$\Pr(X > 10) = \int_{10}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{10}^{\infty} \frac{1}{10}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{10}}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-\frac{x}{10}}\right]_{10}^{\infty} = e^{-1}.$$

(c)

$$\Pr(X \ge 12 \,|\, X \ge 2) = \frac{\Pr(X \ge 12 \cap X \ge 2)}{\Pr(X \ge 2)} = \frac{\Pr(X \ge 12)}{\Pr(X \ge 2)} = \frac{\int_{12}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_{2}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x} = \frac{e^{-12/10}}{e^{-2/10}} = \mathrm{e}^{-1}.$$

(d) La probabilité que la durée de vie de la télévision soit d'encore au moins 10 ans sachant qu'elle fonctionne depuis déjà 2 ans est la même que la probabilité que sa durée de vie soit d'au moins 10 ans. On voit facilement que l'on obtient le même résultat pour chaque nombre t à la place de 2 et chaque nombre $t + s$ à la place de 12 (on prend bien sûr $t, s > 0$).

La loi exponentielle est donc "sans mémoire". En fait, la loi exponentielle est la seule loi continue qui est "sans mémoire", tandis que la loi géométrique est la seule loi discrète qui est "sans mémoire".