

CORRIGÉ 3

Exercice 1. (a) Le tirage de 4 cartes parmi 32.

(b) L'ensemble fondamental contient tous les groupes de 4 cartes choisies parmi les 32. Il contient $\binom{32}{4}$ éléments, par exemple :

- les 4 dames,
- le roi de pique, le 8 de cœur, le valet de carreau et le 7 de trèfle,
- ...

(c) Tous les événements élémentaires ont la même chance d'apparaître. La probabilité d'un événement A est donc calculée comme $\frac{\text{nombre de cas favorables à } A}{\text{nombre total de cas possibles}}$.

(d) (i) Nombre de cas favorables = 1. Nombre de cas au total = $\binom{32}{4}$. Probabilité = $\frac{1}{\binom{32}{4}} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29} = \frac{1}{35960}$.

(ii) Nombre de cas où on a exactement 2 dames = $\binom{4}{2} \binom{28}{2}$. Probabilité = $\frac{\binom{4}{2} \binom{28}{2}}{\binom{32}{4}} = 6 \times \frac{4 \cdot 3 \cdot 28 \cdot 27}{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29} = \frac{567}{8990}$.

(iii) Nombre de cas où on a exactement 2 dames = $\binom{4}{2} \binom{28}{2}$, nombre de cas où on a exactement 3 dames = $\binom{4}{3} \binom{28}{1}$, nombre de cas où on a exactement 4 dames = 1. Probabilité = $\frac{\binom{4}{2} \binom{28}{2} + \binom{4}{3} \binom{28}{1} + 1}{\binom{32}{4}} = \frac{2381}{35960}$.

(iv) Nombre de cas favorables = $4 \binom{8}{4}$. Probabilité = $\frac{4 \binom{8}{4}}{\binom{32}{4}} = 4 \times \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29} = \frac{7}{899}$.

Noter qu'on aurait aussi pu utiliser un autre ensemble fondamental, par exemple les groupes ordonnés de 4 cartes. Cela nous aurait bien sûr donné le même résultat.

Exercice 2. Soit A l'événement "réussir le cours d'analyse", et S l'événement "réussir le cours de statistique". Nous savons que la probabilité de réussir l'examen d'analyse, $\Pr(A)$, est égale à 0.5. Nous savons aussi que $\Pr(S) = 0.7$, et $\Pr(A \cap S) = 0.3$.

(a) $\Pr(\text{réussir au moins un des deux cours}) = \Pr(A \cup S) = \Pr(A) + \Pr(S) - \Pr(A \cap S) = 0.5 + 0.7 - 0.3 = 0.9$.

(b) $\Pr(\text{échouer aux deux cours}) = \Pr(A^c \cap S^c) = 1 - \Pr(A \cup S) = 1 - 0.9 = 0.1$.

(c) $\Pr(\text{échouer en statistiques et réussir en analyse}) = \Pr(S^c \cap A) = \Pr(A) - \Pr(S \cap A) = 0.5 - 0.3 = 0.2$.

(d) $\Pr(\text{échouer en analyse et réussir en statistiques}) = \Pr(A^c \cap S) = \Pr(S) - \Pr(S \cap A) = 0.7 - 0.3 = 0.4$.

Exercice 3. On considère les deux événements

A : La première salle est occupée,

B : La seconde salle est occupée.

Les probabilités données dans l'énoncé sont les suivantes

$$\Pr(A) = \Pr(B),$$

$$\Pr(\text{l'une des salles au moins est occupée}) = \Pr(A \cup B) = 0.9,$$

$$\Pr(\text{les deux salles sont occupées}) = \Pr(A \cap B) = 0.5.$$

Comme $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$, et que $\Pr(A) = \Pr(B)$, on peut déduire que $\Pr(A) = \Pr(B) = (\Pr(A \cup B) + \Pr(A \cap B))/2 = (0.9 + 0.5)/2 = 0.7$. De plus, on dénote A^c (resp. B^c), l'évènement "la première (resp. la deuxième) salle est libre" et on a $\Pr(A^c) = 1 - \Pr(A)$ (resp. $\Pr(B^c) = 1 - \Pr(B)$).

- (i). (a) $\Pr(\text{La première salle est libre}) = \Pr(A^c) = 1 - \Pr(A) = 0.3$
- (b) $\Pr(\text{Les deux salles sont libres}) = \Pr(A^c \cap B^c) = 1 - \Pr(A \cup B) = 0.1$
- (c) $\Pr(\text{L'une des deux salles au moins est libre}) = \Pr(A^c \cup B^c) = 1 - \Pr(A \cap B) = 1 - 0.5 = 0.5$.
- (d) $\Pr(\text{Une seule salle est libre}) = \Pr(A^c \cup B^c) - \Pr(A^c \cap B^c) = 0.5 - 0.1 = 0.4$
- (e) $\Pr(\text{La seconde salle est libre sachant que la première est occupée}) = \Pr(B^c | A) = \frac{\Pr(B^c \cap A)}{\Pr(A)} = \frac{\Pr(B^c) - \Pr(B^c \cap A^c)}{\Pr(A)} = \frac{0.3 - 0.1}{0.7} = 2/7$.
- (ii). Le deux évènements A et B sont indépendants si et seulement si

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \Pr(B)$$

Nous avons $\Pr(A \cap B) = 0.5$ et $\Pr(A) \Pr(B) = 0.7^2 = 0.49$. Les deux quantités n'étant égales, les deux évènements ne sont pas indépendants.

Exercice 4. (a) La pièce est équilibrée, donc la probabilité qu'elle tombe sur pile est $1/2$.

De plus, les lancers sont indépendants, donc la probabilité que la pièce tombe sur pile au premier lancer et sur face au deuxième est de $1/2 \times 1/2 = 1/4$.

- (b) Les deux lancers de la pièce de monnaie.
- (c) $\Omega = \{(P, P), (P, F), (F, P), (F, F)\}$.
- (d) Un évènement élémentaire est par exemple (P, P) , un évènement est par exemple $\{(P, P), (P, F)\}$ (pile au premier lancer).
- (e) Cela nous dit que chaque évènement élémentaire a la même chance d'apparaître. Donc $\Pr(\{(P, P)\}) = \Pr(\{(P, F)\}) = \Pr(\{(F, P)\}) = \Pr(\{(F, F)\}) = 1/4$.
- (f) $\Pr(\{(P, P), (P, F)\}) = \Pr(\{(P, P)\}) + \Pr(\{(P, F)\}) = 1/4 + 1/4 = 1/2$. $\Pr(\{(P, F)\}) = 1/4$.

Exercice 5. L'ensemble fondamental contient toutes les paires ordonnées de chiffres entre 1 et 6, donc 36 évènements élémentaires; par exemple $(1, 1), (1, 2), \dots$. Tous les évènements élémentaires ont la même chance d'apparaître. Donc, $\Pr(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$, $\Pr(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$, et $\Pr(C) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

- (a) $\Pr(A \cap B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ et $\Pr(A) \times \Pr(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Les évènements A et B sont donc indépendants.
- (b) $\Pr(A \cap C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ et $\Pr(A) \times \Pr(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Les évènements A et C sont donc indépendants.
- (c) On a $\Pr(A \cap B \cap C) = \Pr(C | A \cap B) \Pr(A \cap B) = 1 \cdot \Pr(A \cap B) = \Pr(A) \cdot \Pr(B) \neq \Pr(A) \cdot \Pr(B) \cdot \Pr(C)$, les évènements A , B et C ne sont donc pas indépendants. On aurait aussi pu utiliser le fait que $\Pr(A \cap B \cap C) = 9/36 = 1/4$ qui n'est pas égale à $\Pr(A) \cdot \Pr(B) \cdot \Pr(C) = 1/8$.

Exercice 6. Considérons les événements

$$\begin{aligned} F_1 &= \text{une faute sur la première balle,} \\ F_2 &= \text{une faute sur la deuxième balle.} \end{aligned}$$

On sait que $\Pr(F_1) = 3/5$. On ne sert la deuxième balle que s'il y a une faute sur la première, donc $F_2 \subseteq F_1$ et $\Pr(F_2|F_1) = 2/5$. La probabilité d'une double faute est donc $\Pr(F_1 \cap F_2) = \Pr(F_2|F_1)\Pr(F_1) = 3/5 \times 2/5 = 6/25$.

Exercice 7. On considère le même ensemble fondamental que dans l'exercice 5. Considérons les événements

$$\begin{aligned} A &= \text{la somme des deux chiffres vaut } 8 = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}, \\ B &= \text{on a lancé un } 6 = \{(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6), (5, 6), (4, 6), (3, 6), (2, 6), (1, 6)\}. \end{aligned}$$

Selon la définition, on a

$$\Pr(B|A) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(A)} = \frac{\Pr(\{(2, 6), (6, 2)\})}{\Pr(\{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\})} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{2}{5}.$$

Exercice 8. Considérons les événements

$$\begin{aligned} A &= \text{Alice gagne,} \\ B &= \text{Benoît gagne,} \\ C &= \text{Céline gagne,} \\ T_i &= \text{le premier pile apparaît au } i^{\text{ième}} \text{ lancer, } \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Selon les règles du jeu,

$$A = \bigcup_{k=0}^{\infty} T_{3k+1}, \quad B = \bigcup_{k=0}^{\infty} T_{3k+2}, \quad C = \bigcup_{k=0}^{\infty} T_{3k+3}.$$

On a $\Pr(T_i \cap T_j) = \emptyset$ pour $i \neq j$, et $\Pr(T_i) = (\frac{1}{2})^i$.

Donc

$$\begin{aligned} \Pr(A) &= \Pr\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} T_{3k+1}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(T_{3k+1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{3k+1} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{3k} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - (\frac{1}{2})^3} = \frac{4}{7}, \\ \Pr(B) &= \Pr\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} T_{3k+2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(T_{3k+2}) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{3k+2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{3k} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{1 - (\frac{1}{2})^3} = \frac{2}{7}, \\ \Pr(C) &= 1 - \Pr(A) - \Pr(B) = \frac{1}{7}. \end{aligned}$$

Alice a le plus de chance de gagner.