Corrigé 11

Exercice 1. (a) On compte le nombre de succès ("succès" = pièce défectueuse) parmi 100 essais. Donc $Y \sim \mathcal{B}(100, p)$, où p est le vrai pourcentage de pièces défectueuses dans un paquet. On observe une réalisation de l'échantillon $Y_1, \dots, Y_{18} \sim \mathcal{B}(100, p)$.

(b) La fonction de vraisemblance est

$$L(p) = \prod_{i=1}^{18} P(Y_i = y_i) = \prod_{i=1}^{18} \binom{100}{y_i} p^{y_i}(1-p)^{100-y_i} = \left(\prod_{i=1}^{18} \binom{100}{y_i}\right) p^{\sum_{i=1}^{18} y_i}(1-p)^{1\,800-\sum_{i=1}^{18} y_i}.$$

Pour maximiser cette fonction, on peut maximiser son logarithme,

$$\ell(p) = \log(L(p)) = \log\left(\prod_{i=1}^{18} \binom{100}{y_i}\right) + \sum_{i=1}^{18} y_i \log(p) + \left(1\,800 - \sum_{i=1}^{n} y_i\right) \log(1-p).$$

Ainsi, on obtient que

$$\frac{\partial}{\partial p}\ell(p) = \sum_{i=1}^{18} y_i/p - \left(1\,800 - \sum_{i=1}^{18} y_i\right)/(1-p),$$

et donc que

$$\frac{\partial}{\partial p}\ell(p) = 0 \Leftrightarrow p = \frac{1}{1\,800}\sum_{i=1}^{18} y_i = \bar{y}/100.$$

On peut vérifier que $\frac{\partial^2}{\partial p^2}\ell(p) < 0$ pour tout $p \in (0,1)$ et donc il s'agit d'un maximum. Ainsi, l'estimateur du maximum de vraisemblance est

$$\hat{p} = \frac{1}{1\,800}\sum_{i=1}^{18} y_i = \bar{y}/100.$$

(c) On a

$$\hat{p} = \bar{y}/100 = 0.00833.$$

Ici on ne peut pas donner d'intervalle de confiance exact, vu que les observations ne sont pas issues d'une loi normale. Cependant, par un théorème du cours, on sait que l'intervalle avec bornes $\widehat{p} \pm z_{1-\alpha/2} J_n(\hat{p})^{-1/2}$ est un intervalle de confiance approximatif de niveau α pour p. On trouve que pour $\alpha = 0.05$, $z_{1-\alpha/2} = 1.96$. De plus

$$J(\hat{p}) = -\frac{\partial^2}{\partial p^2}\ell(\hat{p}) = \frac{18\bar{y}}{\hat{p}^2} + \frac{18\,(100-\bar{y})}{(1-\hat{p})^2},$$

et en insérant les valeurs numériques, $J(0.00833)^{-1/2} = 0.00214$. L'intervalle approximatif à 95 % est donc $(0.00413, 0.01253)$.

Exercice 2. On a pour $t > 0$

$$\Pr(\lambda n X_{(1)} > t) = \Pr(X_{(1)} > t/(n\lambda)) = \prod_{i=1}^{n} \Pr(X_i > t/(n\lambda)) = [\exp(-\lambda t/(n\lambda))]^n = \exp(-t).$$

Donc pour $t > 0$ $\Pr(\lambda n X_{(1)} \le t) = 1 - \exp(-t)$ qui est la fonction de répartition d'une variable aléatoire Exp(1). Comme la distribution Exp(1) ne dépend pas du paramètre λ, $\lambda n X_{(1)}$ est bien un pivot. Soit q_β le β-quantile de la loi Exp(1). Alors

$$1 - \alpha = \Pr_\lambda \left(q_{\alpha/2} \le n\lambda X_{(1)} \le q_{1-\alpha/2} \right) = \Pr_\lambda \left(\frac{q_{\alpha/2}}{nX_{(1)}} \le \lambda \le \frac{q_{1-\alpha/2}}{nX_{(1)}} \right)$$

pour tout $\lambda > 0$. On a donc l'intervalle de confiance

$$\left[\frac{q_{\alpha/2}}{nX_{(1)}}, \frac{q_{1-\alpha/2}}{nX_{(1)}} \right]$$

Remarque. Dans ce cas les quantiles sont explicites $q_\beta = -\log(1-\beta)$.

Exercice 3. (i). On a

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \theta^{3n} 2^{-n} \exp(-\theta \sum_{i=1}^n Y_i) \prod_{i=1}^n Y_i^2 \\ \ell(\theta) &= 3n \log \theta - n \log 2 - \theta n \overline{Y}_n + 2 \sum_{i=1}^n \log(Y_i) \\ \ell'(\theta) &= \frac{3n}{\theta} - n\overline{Y}_n = 0 \qquad \iff \theta = 3/\overline{Y}_n \\ \ell''(\theta) &= -\frac{3n}{\theta^2} < 0 \end{aligned}$$

donc $\widehat{\theta}_{\mathrm{ML}} = 3/\overline{Y}_n$.

(ii). L'information observée est $J(\widehat{\theta}_{\mathrm{ML}}) = -\ell''(\widehat{\theta}_{\mathrm{ML}}) = n\overline{Y}_n^2/3$. L'intervalle de confiance approximatif est donc

$$\left[\widehat{\theta}_{\mathrm{ML}} - z_{1-\alpha/2}/\sqrt{J(\widehat{\theta}_{\mathrm{ML}})}, \widehat{\theta}_{\mathrm{ML}} + z_{1-\alpha/2}/\sqrt{J(\widehat{\theta}_{\mathrm{ML}})} \right] \approx \left[\frac{3}{\overline{Y}_n} \pm 1.96 \sqrt{\frac{3}{n}} \frac{1}{\overline{Y}_n} \right].$$

Exercice 4. (a) Le modèle est :

$$\begin{array}{ll} X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) & \text{pour chaque } i \in \{1, \dots, 12\}, \\ X_1, \dots, X_{12} & \text{sont indépendantes,} \\ \text{les paramètres } \mu \text{ et } \sigma^2 & \text{sont inconnus.} \end{array}$$

Les hypothèses nulle et alternative sont :

$$H_0 : \mu = 12.2, \quad H_1 : \mu \neq 12.2.$$

(b) Dans des situations similaires, on commence avec la statistique

$$T = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{S_n},$$

où μ_0 est la valeur spécifiée dans l'hypothèse, ici $\mu_0 = 12.2$.

On veut que la valeur de la statistique de test soit "petite" si H_0 est vraie, et "grande" si H_1 est vraie. On note que $\bar{X}_n$ est un estimateur de la vraie valeur μ. Donc si H_0 est vraie, on s'attend à ce que $\bar{X}_n \approx \mu_0$ et $T \approx 0$. En revanche, si H_1 est vraie, on s'attend à ce que $\bar{X}_n \approx \mu \neq \mu_0$ et $T >> 0$ ou $T << 0$. Si on utilise $|T|$ comme statistique de test, on peut s'attendre à des valeurs "petites" sous H_0 et des valeurs "grandes" sous H_1.

(c) Les valeurs de la statistique sont extrêmes quand $|T|$ est "trop grande", i.e. quand $|T| > c$, où c est une valeur critique. Autrement dit, la valeur de la statistique de test est extrême quand $T < -c$ ou $T > c$.

Pour déterminer c, on se rappelle que l'on veut que la probabilité de l'erreur de type I soit égale à α (qui est une petite valeur). L'erreur de type I consiste à rejeter H_0 lorsque H_0 est vraie. Dans notre cas, on veut donc que

$$\alpha = \Pr_{H_0}(\{T < -c\} \cup \{T > c\}) = \Pr_{\mu=\mu_0}(T < -c) + \Pr_{\mu=\mu_0}(T > c). \tag{1}$$

On sait que

$$\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} \sim t_{n-1}.$$

Si H_0 est vraie, $\mu = \mu_0$, et donc $T \sim t_{n-1}$. Ainsi, si H_0 est vraie, on a par symétrie que

$$\Pr_{\mu=\mu_0}(T < -c) + \Pr_{\mu=\mu_0}(T > c) = 2\Pr_{\mu=\mu_0}(T > c) = 2(1 - \Pr_{\mu=\mu_0}(T \leq c)). \tag{2}$$

Pour que ceci soit égale à α (voir (1)) il faut choisir $c = t_{n-1,1-\alpha/2}$.

(d) On prend $\alpha = 0.05$, donc on rejette H_0 en faveur de H_1 si

$$\left|\sqrt{12}\,\frac{\bar{X}_{12} - 12.2}{S_{12}}\right| > t_{11,0.975}.$$

On a

$$\sqrt{12}\,\frac{\bar{x}_{12} - 12.2}{s_{12}} = 2.002 \quad \text{et } t_{n-1,1-\alpha/2} = 2.201,$$

donc on ne rejette pas H_0 en faveur de H_1.

Attention ! Même si on n'a pas rejeté H_0, on ne dit pas qu'on l'accepte. Quand on fait un test statistique, on cherche une évidence contre H_0 en faveur de H_1. Quand on ne rejette pas H_0, cela veut simplement dire qu'il n'y a pas assez d'évidence contre cette hypothèse. Cela n'est pas la même chose que de montrer que H_0 est vraie !

(e) On prend maintenant $\alpha = 0.10$, donc on rejette H_0 en faveur de H_1 si

$$\left|\sqrt{12}\,\frac{\bar{X}_{12} - 12.2}{S_{12}}\right| > t_{11,0.95}.$$

On a

$$\sqrt{12}\,\frac{\bar{x}_{12} - 12.2}{s_{12}} = 2.002 \quad \text{et } t_{11,0.95} = 1.796,$$

donc cette fois on rejette H_0 en faveur de H_1.

La seule différence avec la partie (d) est qu'ici on permet une plus grande probabilité pour l'erreur de type I. Avec une plus grande probabilité d'erreur de type I permise, on a "moins peur de rejeter". Autrement dit, on se satisfait de moins d'évidence pour rejeter H_0. Avec nos données, la différence entre 0.05 et 0.10 est assez grande pour changer la conclusion du test.

(f) Les intervalles de confiance à $100(1-\alpha)\,\%$ qu'on a construits dans la série précédente sont en fait les ensembles des valeurs μ_0 telles qu'on ne rejette pas l'hypothèse $H_0 : \mu = \mu_0$ en faveur de l'alternative $H_1 : \mu \neq \mu_0$ au niveau $\alpha\,\%$.

(g) La valeur p_{obs} est la probabilité sous H_0 que la statistique de test prenne une valeur aussi extrême ou encore plus extrême que la valeur observée. Dans notre cas, en utilisant (2)

$$p_{obs} = \Pr_{H_0}(\{T < -2.002\} \cup \{T > 2.002\}) = 2(1 - \Pr_{\mu=\mu_0}(T \leq 2.002)).$$

Si H_0 est vraie, $T \sim t_{11}$, et donc

$$p_{obs} = 2\left(1 - F_{t_{11}}(2.002)\right) = 2(1 - 0.9647) = 0.071.$$

Noter que la valeur $F_{t_{11}}(2.002)$ peut être trouvée en utilisant un logiciel statistique.

(h) $p_{obs} > 0.05$, donc on ne rejette pas H_0 en faveur de H_1 au niveau 5 %, mais $p_{obs} < 0.10$, donc on rejette H_0 en faveur de H_1 au niveau 10 %.

En fait, la valeur p_{obs} est le plus petit niveau auquel on rejette H_0 en faveur de H_1.

(i) Le modèle :

$X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	pour chaque $i \in \{1, \dots, 12\}$,
$X_1, \dots, X_{12}$	sont indépendantes,
les paramètres μ et σ^2	sont inconnus.

Les hypothèses nulle et alternative sont :

$$H_0 : \mu = 15, \quad H_1 : \mu \neq 15.$$

Comme la valuer 15 n'est pas dans l'intervalle de confiance calculé la semaine passée, on peut rejeter H_0 en faveur de H_1 sans faire aucun calcul supplémentaire.

Pour la méthode directe, on rejette H_0 en faveur de H_1 si

$$\sqrt{12}\left|\frac{\bar{X}_{12} - 15}{S_{12}}\right| > t_{11,0.975},$$

On a

$$\sqrt{12}\,\frac{\bar{x}_{12} - 15}{s_{12}} = -3.05 \quad \text{et } t_{11,0.975} = 2.201,$$

donc on rejette H_0 en faveur de H_1 au niveau 5 %, et on peut dire que le nouveau modèle a une performance différente. On peut de plus conclure que la consomation est inférieure et donc que le nouveau modèle est meilleur.

Exercice 5. On suppose que l'on a deux échantillons indépendants (les variables de chaque échantillon indépendantes entre elles et les deux échantillons sont indépendants car il s'agit de 12 personnes différentes), $X_1, \dots, X_6$ (les temps observés pour le premier groupe), et $Y_1, \dots, Y_6$ (les temps observés pour le deuxième groupe), tels que $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma^2)$ et $Y_j \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma^2)$.

Ces suppositions sont discutables. Par exemple, les variances estimées des deux échantillons, s_X^2 et s_Y^2, semblent être assez différentes. On fait ces suppositions ici quand même afin de pouvoir utiliser une statistique de test simple (la statistique donnée dans l'indication). Il existe d'autres méthodes qui peuvent être utilisées lorsque l'on veut faire des suppositions différentes (par exemple moins restrictives).

L'hypothèse à tester est $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ contre l'alternative $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$. Autrement dit, on veut tester $H_0 : \mu_X - \mu_Y = 0$ contre $H_1 : \mu_X - \mu_Y \neq 0$.

On peut baser le test sur la différence entre $\bar{X}_6$ (l'estimateur de μ_X) et $\bar{Y}_6$ (l'estimateur de μ_Y). Si H_0 est vraie, on s'attend à ce que $\bar{X}_6 \approx \bar{Y}_6$, et si H_1 est vraie, on s'attend à ce que

$|\bar{X}_6 - \bar{Y}_6| >> 0$. Donc on va rejeter H_0 en faveur de H_1 si $|\bar{X}_6 - \bar{Y}_6| > c$. Ceci est équivalent à $|T| > d$, où

$$T = \sqrt{6+6-2} \times \sqrt{\frac{6 \times 6}{6+6}} \times \frac{\bar{X}_6 - \bar{Y}_6}{\sqrt{5 \times S_X^2 + 5 \times S_Y^2}}. \tag{3}$$

En effet, si H_0 est vraie, on a $\mu_X = \mu_Y$ et donc la statistique donnée dans l'indication se réduit à la statistique T définie en (3). Par ailleurs, on sait d'après l'indication que $T \sim t_{6+6-2}$. On choisit $\alpha = 0.05$ et donc on prend $d = t_{10,0.975}$.

Nous avons $\bar{x}_6 = 2.95$, $\bar{y}_6 = 3.82$, $s_x^2 = 0.094$ et $s_y^2 = 0.478$, ce qui donne

$$t_{obs} = \sqrt{10} \times \sqrt{\frac{36}{12}} \times \frac{2.95 - 3.82}{\sqrt{5 \times 0.094 + 5 \times 0.478}} = -2.81.$$

Par ailleurs, $t_{10,0.975} = 2.228$. Ainsi, on rejette l'hypothèse H_0 en faveur de H_1 au niveau de 5 %.

Exercice 6. La situation paraît assez similaire à celle de l'exercice 2. On a deux échantillons, $X_1, \ldots, X_{10}$ (les temps observés pour le soporifique A), et $Y_1, \ldots, Y_{10}$ (les temps observés pour le soporifique B), et on suppose $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ et $Y_j \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$. Les variables X_i peuvent être supposées indépendantes entre elles, et les variables Y_j peuvent être supposées indépendantes entre elles. Mais il y a une importante différence ! On ne peut pas supposer que les variables X_i sont indépendantes des variables Y_i, parce que les médicaments ont été administrés aux mêmes personnes. Cela va changer la statistique de test que l'on va utiliser.

Pour obtenir une statistique de test, on va utiliser l'indication et travailler avec l'échantillon $Z_1, \ldots, Z_{10}$, où $Z_i = X_i - Y_i$ pour $i \in \{1, \ldots, 10\}$. Les variables Z_i peuvent être supposées indépendantes et normales, $Z_i \sim \mathcal{N}(\mu_X - \mu_Y, \sigma^2)$ avec $\sigma^2 = \mathrm{var}(X_i) + \mathrm{var}(Y_i) - 2\mathrm{cov}(X_i, Y_i)$ inconnue. Maintenant on peut procéder comme dans l'exercice 1.

On va tester l'hypothèse $H_0 : \mu_Y = \mu_X + 3$ contre l'hypothèse alternative $H_1 : \mu_Y \neq \mu_X + 3$. Autrement dit, $H_0 : \mu_X - \mu_Y = -3$ et $H_1 : \mu_X - \mu_Y \neq -3$. On va utiliser la statistique de test T où

$$T = \sqrt{10}\,\frac{\bar{Z}_{10} + 3}{S_{10}},$$

et on va rejeter H_0 en faveur de H_1 si t_{obs}, la réalisation de T, vérifie $|t_{obs}| > t_{9,0.975}$ (on choisit $\alpha = 0.05$).

Dans notre cas, on a

$$\begin{aligned}
\bar{z}_{10} &= \bar{x}_{10} - \bar{y}_{10} = 0.75 - 2.19 = -1.44, \\
s_z^2 &= s_x^2 + s_y^2 - 2s_{xy}^2 = 3.20 + 4.63 - 2 \times 3.11 = 1.61, \text{ et} \\
t_{obs} &= \sqrt{10}\,\frac{3 - 1.44}{\sqrt{1.61}} = 3.9.
\end{aligned}$$

Comme $t_{9,0.975} = 2.262$, on rejette H_0 en faveur de H_1. Donc, au niveau 5 %, on a montré que l'effet du soporifique B n'a pas une moyenne de 3 heures de plus que celui du soporifique A.