Série 8

Exercice 1. Soit $\alpha \in (0,1)$.

(a) On considère la variable aléatoire X suivant une loi normale standard $\mathcal{N}(0,1)$. Exprimer le $(1-\alpha)$-quantile en fonction du α-quantile, $\Phi^{-1}(\alpha)$.

(b) On considère maintenant la variable aléatoire Y suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Exprimer son α-quantile en fonction de $\Phi^{-1}(\alpha)$.

(c) Donner la valeur des 0.8-quantile et 0.2-quantile d'une variable aléatoire suivant $\mathcal{N}(3, 0.25)$.

Exercice 2. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées d'espérance $\mu \in \mathbb{R}$ et de variance $\sigma^2 \in (0, \infty)$, et soient $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et $\overline{X}_n = S_n/n$.

(a) Calculer $\mathbb{E}[S_n]$ et $\mathrm{Var}(S_n)$.

(b) Trouver des constantes a_n et b_n telles que la variable aléatoire $Z_n = a_n\,(S_n - b_n)$ vérifie $\mathbb{E}[Z_n] = 0$ et $\mathrm{Var}(Z_n) = 1$.

(c) Calculer $\mathbb{E}[\overline{X}_n]$ et $\mathrm{Var}(\overline{X}_n)$.

(d) Trouver les constantes c_n et d_n telles que la variable aléatoire $Z_n = c_n\,(\overline{X}_n - d_n)$ vérifie $\mathbb{E}[Z_n] = 0$ et $\mathrm{Var}(Z_n) = 1$. (Noter que ce Z_n est le même que le Z_n dans la partie (b).)

(e) En se basant sur l'énoncé, que peut-on dire de la loi de X_i pour $i = 1, \ldots, n$?

(f) Que peut-on donc dire de $\Pr(X_i \leq x)$ pour une constante $x \in \mathbb{R}$ et $i = 1, \ldots, n$?

(g) Que peut-on dire de la loi de Z_n si n est grand ?

(h) Que peut-on dire de $\Pr(Z_n \leq x)$ pour une constante $x \in \mathbb{R}$ si n est grand ?

Exercice 3. Soit X le résultat du jet d'un dé équilibré.

(a) Trouvez $\mathbb{E}[X]$ et $\mathrm{Var}[X]$.

(b) On lance 100 dés équilibrés de façon indépendante. Calculez approximativement la probabilité que la somme des 100 résultats soit comprise entre 340 et 360.

Exercice 4. Supposons que le nombre de clients entrant dans un magasin un jour donné soit une variable de Poisson de paramètre $\lambda = 12$, et que ce nombre soit indépendant d'un jour à l'autre.

(a) Approximez la probabilité qu'il y ait au moins 250 entrées durant un mois de 22 jours ouvrables.

(b) Combien de jours le magasin devra-t-il ouvrir ses portes pour être sûr à 97.5 % d'accueillir au moins 250 clients ?

Exercice 5. Un camion doit livrer des colis dont le poids est supposé être une variable aléatoire de moyenne 50 kg et d'écart-type 5 kg.

(a) Calculer approximativement la probabilité que le poids total de 40 de ces colis ne dépasse pas 2.05 tonnes.

(b) Combien de colis peut transporter le camion si l'on veut que la charge totale ne dépasse 2 tonnes qu'avec une probabilité approximative de 0.04 ?

(c) Il faut livrer 50 colis. Quelle doit être la capacité de charge du camion si l'on veut que la charge ne dépasse la capacité qu'avec une probabilité approximative de 0.02 ?