Série 7

Exercice 1. Calculez l'espérance et la variance des variables aléatoires suivantes :

(a) Y avec la densité $f(y) = 5\,y^4$ si $y \in (0,1)$, et $f(y) = 0$ sinon,

(b) Z avec la fonction de fréquences donnée par

z_i	1	2	3	4	5	6
$f(z_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

,

(c) W avec la fonction de répartition $F(w) = 1 - \frac{1}{w^4}$ si $w \geq 1$, et $F(w) = 0$ sinon.

Exercice 2. On définit trois variables aléatoires indépendantes Y_1, Y_2, Y_3 telles que $\mathbb{E}[Y_i] = i$ et $\mathrm{Var}[Y_i] = i$ pour $i = 1, 2, 3$. Soient

$$Z_1 = \tfrac{1}{2}(Y_1 + 2Y_2), \qquad Z_2 = \tfrac{1}{2}(Y_2 - Y_3).$$

Trouvez l'espérance et la variance de Z_i pour $i = 1, 2$ et calculez leur corrélation.

Exercice 3. Juliette a donné rendez-vous à Roméo à 21h00 environ sous son balcon. L'heure d'arrivée de Roméo est une variable aléatoire uniformément distribuée entre 20h55 et 21h05. L'heure d'apparition de Juliette est uniformément distribuée entre 20h50 et 21h20, et ceci, indépendamment de l'arrivée de Roméo.

Pour simplifier les calculs, choisissons 20h50 comme heure de référence, puis définissons X : heure d'arrivée de Roméo, et Y : heure d'arrivée de Juliette. D'après l'énoncé, on a $X \sim U(5, 15)$ et $Y \sim U(0, 30)$.

(a) Quelles sont l'espérance et la variance de l'heure d'apparition de Juliette ?

(b) Quelle est la probabilité que Roméo doive attendre Juliette ?

(c) Quelle est la probabilité que la première personne présente au rendez-vous n'attende pas plus de 5 minutes ?

Exercice 4. À l'ouverture d'un guichet, la file d'attente se compose de quatre personnes. Supposons que le temps de service de chaque client (en minutes) suive une loi exponentielle $\exp(1/2)$, et que ces temps soient indépendants.

Soit D le temps d'attente jusqu'au début du service du dernier des quatre clients.

(a) Calculer l'espérance et la variance de D.

(b) Quelle est la loi du temps de service le plus court des quatre clients ?
Indice : Si X_i, $i = 1, 2, 3, 4$, sont les temps de service, calculer $\Pr\{\min(X_1, \ldots, X_4) > t\}$ et en déduire la densité de $Y = \min(X_1, \ldots, X_4)$.