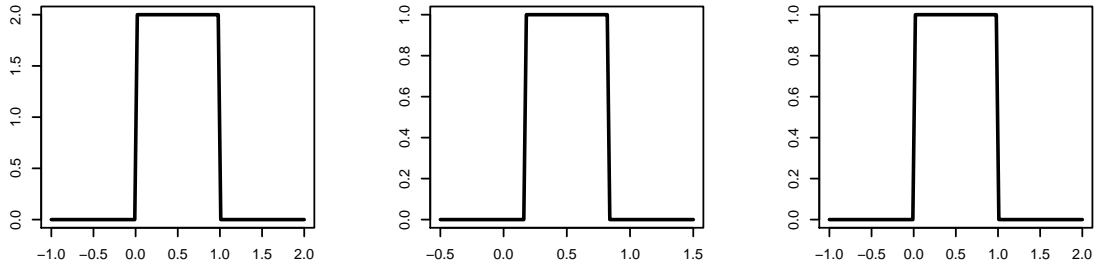
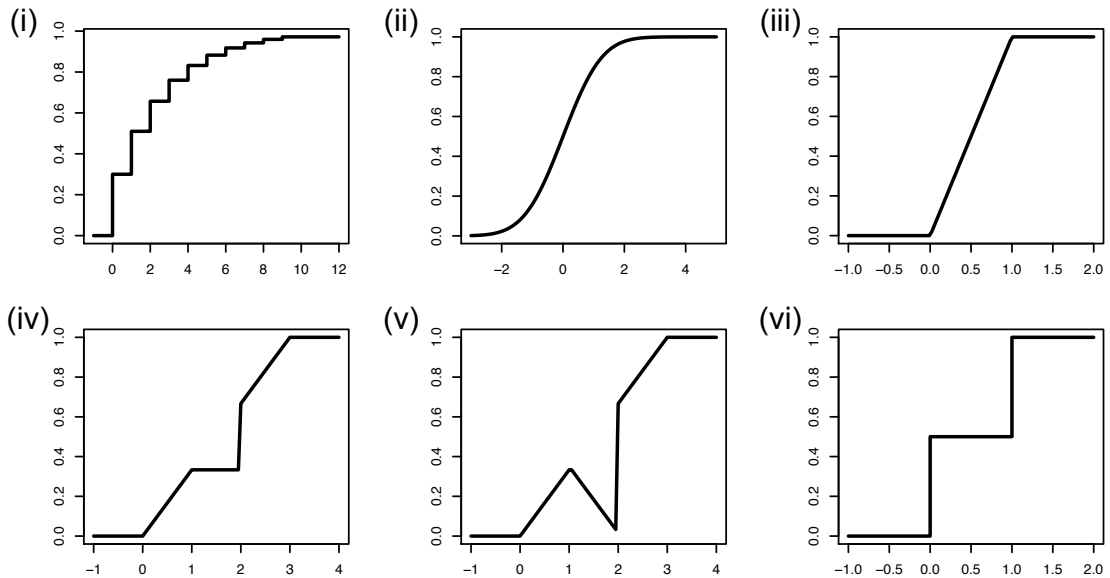


SÉRIE 5

**Exercice 1.** (a) Laquelle des fonctions suivantes est la densité d'une variable continue? Reconnaissez-vous cette loi?



(b) Les fonctions suivantes sont-elles des fonctions de répartition? Si oui, le sont-elles pour des variables discrètes ou continues?



(c) Pouvez-vous retrouver la fonction de répartition correspondant à la densité du point (a)?

**Exercice 2.** (a) Pour chacune des fonctions de répartition suivantes, calculez la fonction de densité correspondante. Définissez-les sur tout  $\mathbb{R}$ .

- (i)  $F(x) = 1 - \frac{1}{x^3}$  pour  $x \geq 1$ , et  $F(x) = 0$  pour  $x < 1$ .
- (ii)  $F(x) = \int_0^x \frac{(\alpha+\beta-1)!}{(\alpha-1)!(\beta-1)!} t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt$  pour  $x \in (0, 1)$ ,  $F(x) = 0$  pour  $x \leq 0$ , et  $F(x) = 1$  pour  $x \geq 1$  ( $\alpha \in \mathbb{N}$  et  $\beta \in \mathbb{N}$  sont des paramètres).

(b) Pour chacune des fonctions de densité suivantes, calculez la fonction de répartition correspondante. Définissez-les sur tout  $\mathbb{R}$ .

- (i)  $f(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)}$  pour  $t \in \mathbb{R}$ .
- (ii)  $f(t) = 4t^3$  pour  $t \in (0, 1)$ , et  $f(t) = 0$  pour  $t \notin (0, 1)$ .

(c) Soit  $X$  une variable aléatoire dont la fonction de densité est  $f(x) = cx^{-4}$  pour  $x \geq 1$ , et  $f(x) = 0$  pour  $x < 1$ .

- (i) Trouvez la constante  $c$ . A quelle fonction de répartition du point (a) cette loi correspond-t-elle?

- (ii) Calculez  $\Pr(X > 1)$ ,  $\Pr(0 < X \leq 3)$  et  $\Pr(X > 2 \mid X < 3)$ .

**Exercice 3.** Un livre de 350 pages contient 450 fautes de frappe réparties au hasard et indépendamment. On s'intéresse à une page donnée.

- (a) Pour chaque faute  $i = 1, \dots, 450$ , on définit  $I_i = 1$  si la faute  $i$  est sur la page, et 0 sinon. Quelle est la valeur de  $p = \Pr(I_i = 1)$  ?
- (b) On pose  $X = \sum_{i=1}^{450} I_i$ . Quelle est la loi de  $X$  ?
- (c) Écrivez et calculez la probabilité  $\Pr(X \geq 3)$ .
- (d) Proposez une approximation pertinente à l'aide d'une autre loi et comparez le résultat avec la valeur exacte.

**Exercice 4.** Considérons la variable aléatoire  $X$  qui donne la durée de vie en années d'une télévision. Supposons que la loi de  $X$  est donnée par la densité  $f(x) = \frac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}}$  pour  $x \geq 0$ , et  $f(x) = 0$  pour  $x < 0$ .

- (a) Avez-vous vu cette loi en classe ?
- (b) Calculez la probabilité que la télévision que vous venez d'acheter ait une durée de vie supérieure à 10 ans.
- (c) Vous possédez une telle télévision depuis 2 ans. Quelle est la probabilité que sa durée de vie soit encore au moins de 10 ans à partir de maintenant ?
- (d) Interprétez les résultats des parties (b) et (c).