Série 4

Exercice 1. Reprenons l'exemple du cours : Un test diagnostique est utilisé pour dépister une infection virale. En cas d'infection, le test la détecte avec probabilité 0.99. En revanche, si le patient n'est pas infecté, le test donne un résultat faussement positif avec probabilité 0.02. En moyenne 1 patient sur 1 000 est infecté. Chaque patient est soumis à deux tests réalisés séparément. Les résultats des tests sont supposés indépendants conditionnellement à l'état de santé réel du patient. Un patient est déclaré malade si les deux tests sont positifs.

(a) Calculer la probabilité qu'un patient soit effectivement infecté sachant que ses deux tests sont positifs. Comparer avec la valeur trouvée en cours.

(b) Justifier que, bien que les résultats des tests soient indépendants conditionnellement à l'état de santé, ils ne sont pas indépendants de façon inconditionnelle.

Exercice 2. On jette un dé équilibré. Considérons l'ensemble fondamental $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, et la probabilité $\Pr(i) = 1/6$, $i \in \{1, \ldots, 6\}$.
Définissons la variable aléatoire X : le chiffre qu'on a obtenu sur le dé, et la variable aléatoire Y :

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si on a obtenu un 6,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(a) Décrivez les variables X et Y de la manière formelle, i.e., comme des fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$.

(b) Quel est l'ensemble H des valeurs prises pour la variable X ? Et pour Y ?

(c) Donnez la fonction des fréquences (= fonction de masse) pour la variable X. Faites de même pour Y.

(d) Donnez la fonction de répartition pour la variable X. Faites de même pour Y.

(e) Quelle est la loi de la variable Y ? Est-ce que c'est une des lois que vous avez vues en classe ?

Exercice 3. (a) Les fonctions suivantes peuvent-elles être des fonctions de fréquences ?

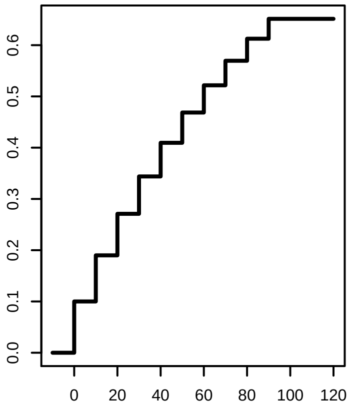
x_i	0	1	2	3
$f(x_i)$	0.25	0.25	0.25	0.25

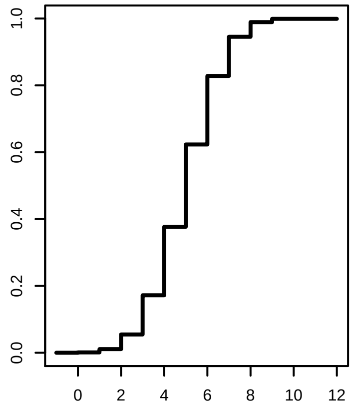
x_i	0	1	2	3
$f(x_i)$	0.15	0.15	0.15	0.15

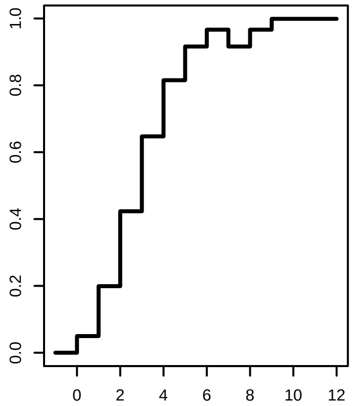
x_i	0	1	2	3	4	5
$f(x_i)$	0.03	0.16	0.31	0.31	0.16	0.03

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x_i)$	0.30	0.21	0.15	0.10	0.07	0.05	0.04	0.02	0.02	-0.01	0.03

(b) Les fonctions suivantes peuvent-elles être des fonctions de répartition ?







(c) La loi de la variable aléatoire X est donnée par $P(X = i) = c(1-p)^i$ pour $i = 0, 1, 2, \ldots$, $0 < p < 1$ et $c > 0$ une constante. Que vaut c ?

Exercice 4. Julie laisse habituellement la clé de sa voiture dans une poche du manteau qu'elle porte en conduisant. Elle a trois manteaux et quand elle a besoin de sa clé, elle ne se souvient plus de quel manteau elle a porté la dernière fois qu'elle a conduit. Elle cherche donc sa clé à chaque fois qu'elle doit prendre sa voiture. De plus, elle est souvent en retard, il lui arrive donc de ne pas trouver sa clé même lorsqu'elle cherche dans la bonne poche, car elle ne prend pas le temps de bien regarder.

Aujourd'hui elle pense avoir laissé la clé dans le manteau court avec une probabilité p_c, dans le manteau long avec une probabilité p_l, et dans la veste trench avec la probabilité p_v. Si la clé est dans le manteau court, elle la retrouve avec une probabilité de α_c. Pour le manteau long, cette probabilité est de α_l, et pour la veste trench elle est de α_v.

Elle a déjà cherché dans le manteau court et elle n'a rien trouvé. Quelle est la probabilité que la clé s'y trouve quand même ?