Corrigé 8

Exercice 1. (a) Soient x_α et $x_{1-\alpha}$ respectivement les α- et $(1-\alpha)$-quantiles de la loi normale standard. Cette loi étant continue, on a

$$\begin{aligned}\Phi(x_\alpha) &= \alpha,\\ \Phi(x_{1-\alpha}) &= 1-\alpha,\end{aligned}$$

et donc $\Phi(x_{1-\alpha}) = 1 - \Phi(x_\alpha)$. Or, nous savons par symmétrie que $1 - \Phi(z) = \Phi(-z)$ pour tout $z \in \mathbb{R}$. Donc $\Phi(x_{1-\alpha}) = \Phi(-x_\alpha)$ et par conséquent $x_{1-\alpha} = -x_\alpha$, puisque $\Phi(\cdot)$ est strictement croissante.

(b) On standardise Y en soustrayant la moyenne puis en divisant par la déviation standard, pour obtenir une variable Z suivant une loi normale standard. On obtient

$$\begin{aligned}\alpha &= \Pr(Y \leq y_\alpha) = \Pr\left(\frac{Y-\mu}{\sigma} \leq \frac{y_\alpha - \mu}{\sigma}\right) = \Pr\left(Z \leq \frac{y_\alpha-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{y_\alpha-\mu}{\sigma}\right)\\ &\Leftrightarrow \ \Phi^{-1}(\alpha) = \frac{y_\alpha-\mu}{\sigma}\\ &\Leftrightarrow \ y_\alpha = \mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha).\end{aligned}$$

(c) En utilisant le résultat du point (b), on a $y_{0.8} = 3 + \sqrt{0.25}\,\Phi^{-1}(0.8) \approx 3 + 0.5 \times 0.842 = 3.42$. On obtient ensuite immédiatement, en utilisant (a) : $y_{0.2} = 3 + \sqrt{0.25}\,\Phi^{-1}(0.2) = 3 - \sqrt{0.25}\,\Phi^{-1}(0.8) \approx 2.579$ (symétrie de la loi normale pour ne pas avoir à inspecter les tables une seconde fois).

Exercice 2. (a) On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_n) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = n\,\mu,\\ \operatorname{Var}(S_n) &= \operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \operatorname{Var}(X_i) = n\,\sigma^2,\end{aligned}$$

où, pour la variance, on a utilisé l'hypothèse d'indépendance des variables aléatoires X_i.

(b) Avec $b_n = n\mu$ et $a_n = 1/(\sqrt{n}\sigma)$ on a

$$\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}\sigma}\left(\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) - n\mu\right) = 0,$$

$$\operatorname{Var}(Z_n) = \operatorname{Var}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right) = \frac{1}{n\sigma^2}\sum_{i=1}^n \operatorname{Var}(X_i) = 1.$$

(c) On a

$$\mathbb{E}(\overline{X}_n) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = \mu,$$

$$\operatorname{Var}\left(\overline{X}_n\right) = \operatorname{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \operatorname{Var}(X_i) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

(d) Avec $d_n = \mu$ et $c_n = \sqrt{n}/\sigma$ on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z_n) &= \mathbb{E}\left(\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}\right) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\mathbb{E}(\overline{X}_n) - \mu\right) = 0,\\ \operatorname{Var}(Z_n) &= \operatorname{Var}\left(\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}\right) = \frac{n}{\sigma^2}\operatorname{Var}(\overline{X}_n) = 1.\end{aligned}$$

(e) On ne connaît pas la loi des X_i. Bien que l'on connaisse $\mathbb{E}(X_i)$ et $\operatorname{Var}(X_i)$, ce n'est pas assez pour déterminer la loi de X_i.

(f) Puisqu'on ne connaît pas la loi de X_i, on ne peut pas calculer la probabilité $\Pr(X_i \le x)$, pour $x \in \mathbb{R}$.

(g) Par le théorème central limite, la limite de la distribution de Z_n si $n \to \infty$ est $\mathcal{N}(0,1)$. Donc pour n grand, la distribution de Z_n est approximativement $\mathcal{N}(0,1)$.

(h) D'après la partie (g), on a $\Pr(Z_n \le x) \approx \Phi(x)$, où $\Phi(x)$ est la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Cela montre que le théorème central limite est extrêmement puissant (la loi des X_i est inconnue, on sait uniquement qu'elles sont iid, de moyenne finie et de variance finie et strictement positive !), et le rôle de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ est central.

Exercice 3. (a) La loi de X est donnée par la fonction de fréquences

x_i	1	2	3	4	5	6
$f(x_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

On a donc $\mathbb{E}[X] = 7/2$ et $\operatorname{Var}[X] = 35/12$.

(b) Maintenant soit X_i le résultat du $i$ème dé, et $S_{100} = \sum_{i=1}^{100} X_i$ la somme des 100 résultats. On cherche $\Pr(340 \le S_{100} \le 360)$. Par le théorème central limite, on sait que la variable standardisée

$$Z_{100} = \frac{S_{100} - 100 \times 7/2}{\sqrt{100 \times 35/12}} = \frac{S_{100} - 350}{\sqrt{875/3}}$$

suit approximativement la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Donc

$$\begin{aligned}\Pr(340 \le S_{100} \le 360) &= \Pr\left(\frac{340-350}{\sqrt{875/3}} \le \frac{S_{100}-350}{\sqrt{875/3}} \le \frac{360-350}{\sqrt{875/3}}\right)\\ &\approx \Phi(\sqrt{12/35}) - \Phi(-\sqrt{12/35})\\ &= 2\Phi(\sqrt{12/35}) - 1 = 0.44.\end{aligned}$$

Exercice 4. Soit X_i le nombre de clients qui entrent le $i$ème jour. On a $\mathbb{E}[X_i] = 12$ et $\operatorname{Var}[X_i] = 12$. Le nombre total de clients entrant au cours de n jours est $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Par le théorème central limite, on sait que la variable standardisée

$$Z_n = \frac{S_n - n \times 12}{\sqrt{n \times 12}}$$

suit approximativement la loi $\mathcal{N}(0,1)$ pour n grand.

(a) Avec $n = 22$ nous pouvons calculer

$$\begin{aligned}
\Pr(S_{22} \geq 250) &= \Pr\left(\frac{S_{22} - 22 \times 12}{\sqrt{22 \times 12}} \geq \frac{250 - 22 \times 12}{\sqrt{22 \times 12}}\right) \\
&\approx 1 - \Phi\left(\frac{250 - 22 \times 12}{\sqrt{22 \times 12}}\right) = 1 - \Phi\left(-\frac{14}{\sqrt{264}}\right) = \Phi(0.862) = 0.805.
\end{aligned}$$

(b) Maintenant on cherche n tel que $\Pr(S_n \geq 250) = 0.975$. On veut donc que

$$\begin{aligned}
& \Pr(S_n \geq 250) = 0.975 \\
\Leftrightarrow \quad & \Pr\left(\frac{S_n - n \times 12}{\sqrt{n \times 12}} \geq \frac{250 - n \times 12}{\sqrt{n \times 12}}\right) = 0.975 \\
\Leftrightarrow \quad & 1 - \Phi\left(\frac{250 - n \times 12}{\sqrt{n \times 12}}\right) = 0.975 \\
\Leftrightarrow \quad & \Phi\left(\frac{250 - n \times 12}{\sqrt{n \times 12}}\right) = 0.025 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{250 - n \times 12}{\sqrt{n \times 12}} = \Phi^{-1}(0.025) \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{250 - n \times 12}{\sqrt{n \times 12}} = -\Phi^{-1}(0.975) \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{250 - n \times 12}{\sqrt{n \times 12}} = -1.96 \\
\Leftrightarrow \quad & -n \times 12 + 1.96\sqrt{12}\sqrt{n} + 250 = 0.
\end{aligned}$$

Cela est vrai pour

$$\sqrt{n} = \frac{-1.96\sqrt{12} \pm \sqrt{1.96^2 \times 12 + 4 \times 12 \times 250}}{-2 \times 12} = \begin{cases} 4.86 \\ -4.29 \end{cases}.$$

Puisque $\sqrt{n} \geq 0$, on obtient que $\sqrt{n} = 4.86$ et $n = 23.6$. Si le magasin ouvre ses portes pendant au moins 24 jours, il reçoit au moins 250 clients avec une probabilité plus grande que 0.975.

Exercice 5. Soit X_i le poids du i-ème colis, avec $\mathbb{E}[X_i] = 50$ et $\mathrm{Var}[X_i] = 25$. Le poids total de n colis est donc $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. D'après le théorème central limite, on a que

$$Z_n = \frac{S_n - n \times 50}{\sqrt{n} \times 5}$$

suit approximativement la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ pour n grand.

(a) On cherche

$$\Pr(S_{40} \leq 2050) = \Pr\left(\frac{S_{40} - 40 \times 50}{\sqrt{40} \times 5} \leq \frac{2050 - 40 \times 50}{\sqrt{40} \times 5}\right) \approx \Phi(1.581) = 0.9429.$$

(b) On cherche n tel que $\Pr(S_n > 2000) = 0.04$, c'est à dire que

$$
\begin{aligned}
& \Pr\left(\frac{S_n - n \times 50}{\sqrt{n} \times 5} > \frac{2000 - n \times 50}{\sqrt{n} \times 5}\right) = 0.04 \\
\Leftrightarrow\quad & \Phi\left(\frac{2000 - n \times 50}{\sqrt{n} \times 5}\right) = 0.96 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{2000 - n \times 50}{\sqrt{n} \times 5} = \Phi^{-1}(0.96) \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{2000 - n \times 50}{\sqrt{n} \times 5} = 1.755.
\end{aligned}
$$

On en déduit $n = 38.9$, donc le camion ne peut transporter plus de 38 colis.

(c) On cherche x tel que $\Pr\left(S_{50} > x\right) = 0.02$, c'est-à-dire que

$$
\begin{aligned}
& \Pr\left(\frac{S_{50} - 50 \times 50}{\sqrt{50} \times 5} > \frac{x - 50 \times 50}{\sqrt{50} \times 5}\right) = 0.02 \\
\Leftrightarrow\quad & \Phi\left(\frac{x - 2500}{\sqrt{2} \times 25}\right) = 0.98 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{x - 2500}{\sqrt{2} \times 25} = \Phi^{-1}(0.98) \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{x - 2500}{\sqrt{2} \times 25} = 2.06 \\
\Leftrightarrow\quad & x = 2573 \text{ kg.}
\end{aligned}
$$