

CORRIGÉ 7

**Exercice 1.** (a) Il s'agit d'une variable continue, donc par définition,

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{\mathbb{R}} yf(y) dy,$$

où  $f$  est la densité de  $Y$ . Ici,

$$\mathbb{E}[Y] = \int_0^1 5y^5 dy = \left[ \frac{5}{6} y^6 \right]_0^1 = \frac{5}{6}.$$

Pour calculer la variance on utilise la formule

$$\text{Var}[Y] = \mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[Y])^2.$$

Pour une variable continue on a

$$\mathbb{E}[Y^2] = \int_{\mathbb{R}} y^2 f(y) dy,$$

donc

$$\mathbb{E}[Y^2] = \int_0^1 5y^6 dy = \left[ \frac{5}{7} y^7 \right]_0^1 = \frac{5}{7}, \quad \text{et} \quad \text{Var}[Y] = \frac{5}{7} - \frac{25}{36} = \frac{5}{252}.$$

(b) Il s'agit d'une variable discrète, donc

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{z_i} z_i \Pr(Z = z_i) = \sum_{i=1}^6 i \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 i = \frac{1}{6} \frac{6 \times 7}{2} = \frac{7}{2},$$

$$\mathbb{E}[Z^2] = \sum_{z_i} z_i^2 \Pr(Z = z_i) = \sum_{i=1}^6 i^2 \frac{1}{6} = \frac{1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36}{6} = \frac{91}{6},$$

$$\text{Var}[Z] = \mathbb{E}[Z^2] - (\mathbb{E}[Z])^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}.$$

(c) Il s'agit d'une variable continue de densité  $f(w) = F'(w) = 4w^{-5}$  si  $w > 1$ , et  $f(w) = 0$  sinon. Donc

$$\mathbb{E}[W] = \int_{\mathbb{R}} wf(w) dw = \int_1^{\infty} 4w^{-4} dw = \left[ -\frac{4}{3} w^{-3} \right]_1^{\infty} = \frac{4}{3},$$

$$\mathbb{E}[W^2] = \int_{\mathbb{R}} w^2 f(w) dw = \int_1^{\infty} 4w^{-3} dw = \left[ -\frac{4}{2} w^{-2} \right]_1^{\infty} = 2,$$

$$\text{Var}[W] = \mathbb{E}[W^2] - (\mathbb{E}[W])^2 = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}.$$

**Exercice 2.** Par linéarité de l'espérance, on a

$$\mathbb{E}[Z_1] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[Y_1] + \mathbb{E}[Y_2] = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

et

$$\mathbb{E}[Z_2] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[Y_2] - \frac{1}{2}\mathbb{E}[Y_3] = \frac{2}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Pour  $X$  et  $Y$  indépendantes,  $\text{Var}(aX + bY) = a^2 \text{Var}(X) + b^2 \text{Var}(Y)$ , et comme les  $Y_i$  sont toutes indépendantes, cette formule s'applique :

$$\text{Var}[Z_1] = \frac{1}{4} \text{Var}[Y_1] + \text{Var}[Y_2] = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$$

et

$$\text{Var}[Z_2] = \frac{1}{4}(\text{Var}[Y_2] + \text{Var}[Y_3]) = \frac{2+3}{4} = \frac{5}{4}.$$

Pour la corrélation, on calcule d'abord la covariance. Par bilinéarité, et puisque les variables  $Y_i, i = 1, 2, 3$  sont indépendantes donc non corrélées, on a

$$\begin{aligned} \text{Cov}[Z_1, Z_2] &= \text{Cov}\left[\frac{1}{2}Y_1 + Y_2, \frac{1}{2}Y_2 - \frac{1}{2}Y_3\right] \\ &= \text{Cov}\left[\frac{1}{2}Y_1, \frac{1}{2}Y_2\right] + \text{Cov}\left[Y_2, \frac{1}{2}Y_2\right] - \text{Cov}\left[\frac{1}{2}Y_1, \frac{1}{2}Y_3\right] - \text{Cov}\left[Y_2, \frac{1}{2}Y_3\right] \\ &= \frac{1}{2} \text{Cov}[Y_1, Y_2] + \frac{1}{2} \text{Cov}[Y_2, Y_2] - \frac{1}{4} \text{Cov}[Y_1, Y_3] - \frac{1}{2} \text{Cov}[Y_2, Y_3] \\ &= 0 + \frac{1}{2} \text{Var}[Y_2] + 0 + 0 = 1. \end{aligned}$$

La corrélation est donc

$$\text{Cor}[Z_1, Z_2] = \frac{\text{Cov}[Z_1, Z_2]}{\sqrt{\text{Var}[Z_1] \text{Var}[Z_2]}} = \frac{1}{\sqrt{9/4 \times 5/4}} = \frac{4}{3\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}/15.$$

**Exercice 3.** (a) On a

$$\mathbb{E}[Y] = \int_0^{30} t f_Y(t) dt = \int_0^{30} t \frac{1}{30} dt = \frac{1}{30} \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^{30} = \frac{30}{2} = 15$$

et

$$\begin{aligned} \text{Var}[Y] &= \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = \int_0^{30} t^2 f_Y(t) dt - 15^2 = \int_0^{30} t^2 \frac{1}{30} dt - 15^2 \\ &= \frac{1}{30} \left[ \frac{t^3}{3} \right]_0^{30} - 15^2 = 30^2/12 - 15^2 = 75. \end{aligned}$$

Ainsi l'espérance de l'heure d'arrivée de Juliette est 21h05 et sa variance vaut 75 min<sup>2</sup>.

(b) La fonction de densité conjointe est  $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = \frac{1}{10}\frac{1}{30}$  si  $x \in [5, 15]$  et  $y \in [0, 30]$  (par hypothèse d'indépendance). Ainsi :

$$\Pr(X < Y) = \int_5^{15} \int_x^{30} f_X(x)f_Y(y) dy dx = \frac{1}{300} \int_5^{15} (30 - x) dx = \frac{2}{3}.$$

(c) Il faut calculer :

$$\int_5^{15} \int_{x-5}^{x+5} f_X(x)f_Y(y) dy dx = \frac{1}{300} \int_5^{15} 10 dx = \frac{1}{3}.$$

**Exercice 4.** Soient  $X_1, X_2, X_3, X_4$  les temps de service des quatre clients, alors  $D = X_1 + X_2 + X_3$ .

- (a)  $\mathbb{E}[D] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \mathbb{E}[X_3] = 3 \times 2 = 6$ .  
 $\text{Var}[D] = \text{Var}[X_1] + \text{Var}[X_2] + \text{Var}[X_3] = 3 \times 2^2 = 12$  (indépendants).
- (b) Le service le plus court est décrit par la variable aléatoire  $\min(X_1, X_2, X_3, X_4)$ , sa loi se calcule de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \Pr \{ \min(X_1, X_2, X_3, X_4) \leq t \} &= 1 - \Pr \{ \min(X_1, X_2, X_3, X_4) > t \} \\ &= 1 - \Pr \{ X_1 > t, X_2 > t, X_3 > t, X_4 > t \} \\ &= 1 - \prod_{i=1}^4 \Pr(X_i > t) \\ &= 1 - \left( e^{-\frac{1}{2}t} \right)^4 = 1 - e^{-2t}, \end{aligned}$$

où la deuxième égalité découle du fait que le minimum de plusieurs variables aléatoires est supérieur à  $t$  si et seulement si toutes ces variables sont supérieures à  $t$ , et la troisième égalité découle de l'indépendance des  $X_i$ .  
Ainsi  $\min(X_1, X_2, X_3, X_4) \sim \exp(2)$ .