CORRIGÉ 6

Exercice 1. (a) Discrète.

(b) Continue.

(c) Discrète.

(d) Discrète.

(e) Continue.

Exercice 2. (a) $X \sim \mathcal{B}(m, p)$ pour $m = 800$ et $p = 0.02$. En effet, on peut voir X comme une somme de variables $I_i \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{B}(p)$, $i = 1, \dots, m$, car les voitures arrivent indépendamment les unes des autres et avec la même probabilité $p = 0.02$.

(b) Il s'agit de la loi de Poisson, $X \sim \text{Poiss}(\lambda)$ avec $\lambda = 16$. D'après la loi des petits nombres, la loi $\mathcal{B}(m, p)$ peut être approximée par la loi $\text{Poiss}(\lambda)$ avec $\lambda = mp = 800 \times 0.02 = 16$, car $m = 800$ est grand et $p = 0.02$ est petit.

Exercice 3. On cherche la probabilité que la taille d'un homme de 25 dépasse 180 cm sachant qu'il mesure plus de 177 cm. Formellement, on définit la variable aléatoire X décrivant la taille de l'individu et on s'intéresse à

$$\Pr(X > 180 \mid X > 177) = \frac{\Pr(\{X > 180\} \cap \{X > 177\})}{\Pr(X > 177)} = \frac{\Pr(X > 180)}{\Pr(X > 177)}.$$

(i). On suppose que X suit une loi normale de moyenne 175 et de variance 36. On considère la variable aléatoire standardisée

$$Z = \frac{X - 175}{6}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\Pr(X > 180) &= \Pr\left(\frac{X - 175}{6} > \frac{180 - 175}{6}\right) \\
&= \Pr\left(Z > \frac{180 - 175}{6}\right) = 1 - \Pr\left(Z \leq \frac{180 - 175}{6}\right) \\
&= 1 - \Phi(0.833) = 1 - 0.798 = 0.202
\end{aligned}$$

et de même,

$$\Pr(X > 177) = \Pr\left(\frac{X - 175}{6} > \frac{177 - 175}{6}\right) = \Pr(Z > 1/3) = 1 - \Phi(0.333) = 1 - 0.629 = 0.371.$$

Donc, sous l'hypothèse de la loi normale, $\Pr(X > 180 \mid X > 177) = 0.202/0.371 = 0.544$.

(ii). Ici on s'intéresse toujours à $\Pr(X > 180 \mid X > 177)$ mais cette fois en supposant que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1/175$. On a donc

$$\Pr(X > 180) = 1 - \Pr(X \leq 180) = 1 - [1 - \exp(-180/175)] = 0.357,$$

et

$$\Pr(X > 177) = 1 - \Pr(X \leq 177) = 1 - [1 - \exp(-177/175)] = 0.364,$$

et enfin $\Pr(X > 180 \mid X > 177) = 0.357/0.364 = 0.980$.

(iii). Dans cet échantillon, il y a 14 individus dont la taille dépasse 177 cm et 6 dont la taille dépasse 180 cm. Ainsi, l'estimation empirique de $\Pr(X > 180 \mid X > 177)$ est $6/14 = 0.428$. Cette valeur est plus proche du modèle normal que du modèle exponentiel, ce qui suggère (sur la base de cette probabilité, spécifiquement) que le premier pourrait être plus approprié.

Exercice 4. Définissons la variable aléatoire T désignant le temps d'attente de Julien. Soit D le chiffre sur le dé. On sait que la loi de T sachant qu'il a choisi la cafétéria A est $\mathrm{U}(0, 30)$, et la loi de T sachant qu'il a choisi la cafétéria B est $\mathrm{U}(0, 20)$. Autrement dit, la densité de T sachant que Julien a obtenu 5 ou 6 lors du lancer de dé est

$$f_{T|D=5}(x) = f_{T|D=6}(x) = \begin{cases} 1/30 & \text{pour } x \in (0, 30), \\ 0 & \text{pour } x \notin (0, 30), \end{cases}$$

et la densité de T sachant qu'il a obtenu 1, 2, 3, ou 4 est

$$f_{T|D=1}(x) = f_{T|D=2}(x) = f_{T|D=3}(x) = f_{T|D=4}(x) = \begin{cases} 1/20 & \text{pour } x \in (0, 20), \\ 0 & \text{pour } x \notin (0, 20). \end{cases}$$

(a)

$$\Pr(T > 25 \mid D = 5) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{T|D=5}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{25}^{30} \frac{1}{30}\,\mathrm{d}x = \frac{30 - 25}{30} = 1/6.$$

(b) D'après le théorème des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \Pr(T < 15) &= \Pr(T < 15 \mid D \in \{5, 6\}) \times \Pr(D \in \{5, 6\}) + \\ &\quad \Pr(T < 15 \mid D \in \{1, 2, 3, 4\}) \times \Pr(D \in \{1, 2, 3, 4\}) \\ &= \int_0^{15} \frac{1}{30}\,\mathrm{d}x \times \frac{2}{6} + \int_0^{15} \frac{1}{20}\,\mathrm{d}x \times \frac{4}{6} \\ &= \frac{15}{30} \times \frac{2}{6} + \frac{15}{20} \times \frac{4}{6} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

(c) D'après la formule de Bayes :

$$\Pr(D = 4 \mid T \geq 15) = \frac{\Pr(T \geq 15 \mid D = 4) \times \Pr(D = 4)}{\Pr(T \geq 15)} = \frac{\int_{15}^{20} \frac{1}{20}\,\mathrm{d}x \times \frac{1}{6}}{1 - \Pr(T < 15)} = \frac{\frac{5}{20} \times \frac{1}{6}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{8}.$$