Corrigé 5

Exercice 1. (a) La dernière, car les deux autres fonctions ne satisfont pas la condition $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Il s'agit de la loi uniforme $\mathrm{U}(0,1)$.

(b) Les graphiques (i) et (vi) représentent des fonctions de répartition de lois discrètes. Les graphiques (ii) et (iii) représentent des fonctions de répartition de lois continues. Le graphique (iv) représente une fonction de répartition d'une loi qui est ni discrète, ni continue (c'est en fait une loi mixte). La fonction représentée sur le graphique (v) n'est pas une fonction de répartition, car elle n'est pas croissante.

(c) La fonction de répartition correspondant à la densité du point (a) est la fonction de répartition (iii) du point (b).

Exercice 2. (a) On obtient les fonctions de densité suivantes :

(i)

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 3/x^4 & \text{pour } x \geq 1, \\ 0 & \text{pour } x < 1. \end{cases}$$

(ii)

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} \frac{(\alpha+\beta-1)!}{(\alpha-1)!\,(\beta-1)!}\, x^{\alpha-1}\,(1-x)^{\beta-1} & \text{pour } x \in (0,1), \\ 0 & \text{pour } x \notin (0,1). \end{cases}$$

(b) On obtient les fonctions de répartition suivantes :

(i)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi\,(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\arctan(x) + \frac{1}{2} \qquad \text{pour } x \in \mathbb{R}.$$

(ii)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0 & \text{pour } x \leq 0, \\ \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_0^x 4\,t^3\,\mathrm{d}t = x^4 & \text{pour } x \in (0,1), \\ \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_0^1 4\,t^3\,\mathrm{d}t + \int_1^x 0\,\mathrm{d}t = 1 & \text{pour } x \geq 1. \end{cases}$$

(c) (i) On sait que

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{1} 0\,\mathrm{d}x + \int_1^{\infty} c\,x^{-4}\,\mathrm{d}x = 0 + c\left[-\frac{1}{3\,x^3}\right]_1^{\infty} = \frac{c}{3}.$$

Donc $c = 3$. La loi correspond à la fonction de répartition (i) du point (a).

(ii) On a

$$\begin{aligned} \Pr(X > 1) &= \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{\infty} 3\,x^{-4}\,\mathrm{d}x = 1, \\ \Pr(0 < X \leq 3) &= \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 0\,\mathrm{d}x + \int_1^3 3\,x^{-4}\,\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{27} = \frac{26}{27}. \end{aligned}$$

Enfin, d'après la définition de la probabilité conditionnelle, on a

$$\Pr(X > 2 \mid X < 3) = \frac{\Pr(2 < X < 3)}{\Pr(X < 3)} = \frac{\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_{-\infty}^3 f(x)\,\mathrm{d}x} = \frac{\int_2^3 3\,x^{-4}\,\mathrm{d}x}{\int_1^3 3\,x^{-4}\,\mathrm{d}x} = \frac{1/8 - 1/27}{1 - 1/27} = \frac{19}{208}.$$

Exercice 3. (a) Chaque faute a la même probabilité d'apparaître sur la page, soit

$$p = \Pr(I_i = 1) = \frac{1}{350}, \qquad i = 1, \ldots, 450.$$

(b) Comme $X = \sum_{i=1}^{450} I_i$ est la somme de 450 variables de Bernoulli indépendantes de paramètre $p = 1/350$, on a

$$X \sim \mathcal{B}(m = 450,\, p = 1/350).$$

(c) La loi de X est donc

$$\Pr(X = x) = \binom{450}{x} p^x (1-p)^{450-x}, \quad x = 0, \ldots, 450.$$

Ainsi,

$$\Pr(X \geq 3) = 1 - \Pr(X \leq 2) = 1 - \sum_{i=0}^{2} \binom{450}{i} \left(\frac{1}{350}\right)^i \left(1 - \frac{1}{350}\right)^{450-i}.$$

Numériquement,

$$\Pr(X \geq 3) \approx 0.139.$$

(d) Lorsque m est grand et p petit, la loi binomiale peut être approchée par une loi de Poisson de paramètre

$$\lambda = mp = 450 \times \frac{1}{350} \approx 1.29.$$

Si $Y \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$, alors

$$\Pr(Y \geq 3) = 1 - \Pr(Y \leq 2) = 1 - e^{-\lambda}\left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2}\right).$$

Numériquement,

$$\Pr(Y \geq 3) \approx 0.140,$$

ce qui est très proche de la valeur exacte.

Exercice 4. (a) Il s'agit de la loi exponentielle exp(1/10).

(b)

$$\Pr(X > 10) = \int_{10}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{10}^{\infty} \frac{1}{10}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{10}}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-\frac{x}{10}}\right]_{10}^{\infty} = e^{-1}.$$

(c)

$$\Pr(X > 12 \mid X > 2) = \frac{\Pr(X > 12 \cap X > 2)}{\Pr(X > 2)} = \frac{\Pr(X > 12)}{\Pr(X > 2)} = \frac{\int_{12}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_{2}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x} = \frac{e^{-12/10}}{e^{-2/10}} = \mathrm{e}^{-1}.$$

(d) La probabilité que la durée de vie de la télévision soit d'encore au moins 10 ans sachant qu'elle a déjà fonctionné pendant 2 ans est la même que la probabilité que sa durée de vie soit d'au moins 10 ans. Cela découle de la propriété "sans mémoire" de la loi exponentielle. Plus précisément, pour tout $t > 0$ et $s > 0$, on a :

$$\Pr(X > t + s \mid X > t) = \Pr(X > s).$$

Cela signifie que la probabilité qu'une télévision fonctionne encore s ans, sachant qu'elle a déjà fonctionné t ans, est la même que la probabilité qu'elle survive s ans.