

CORRIGÉ 4

**Exercice 1.** (a) Soient  $M$  l'événement : “la personne choisie est atteinte de la maladie” et  $T_i$  l'événement “le test  $i \in \{1, 2\}$  est positif”. On a :

$$\Pr(M) = 0.001,$$

et par l'indépendance conditionnelle :

$$\Pr(T_1 \cap T_2 \mid M) = \Pr(T_1 \mid M) \Pr(T_2 \mid M) = \frac{99}{100} \frac{99}{100}, \quad \Pr(T_1 \cap T_2 \mid M^c) = \frac{2}{100} \frac{2}{100}.$$

Par le théorème de Bayes

$$\begin{aligned} \Pr(M \mid T_1 \cap T_2) &= \frac{\Pr(T_1 \cap T_2 \mid M) \Pr(M)}{\Pr(T_1 \cap T_2 \mid M) \Pr(M) + \Pr(T_1 \cap T_2 \mid M^c) \Pr(M^c)} \\ &= \frac{\frac{1}{1000} \frac{99}{100} \frac{99}{100}}{\frac{1}{1000} \frac{99}{100} \frac{99}{100} + \frac{999}{1000} \frac{2}{100} \frac{2}{100}} \\ &= \frac{9801}{9801 + 3996} \approx 0.71 \gg 0.047. \end{aligned}$$

(b) La probabilité que les deux tests soient positifs vaut

$$\Pr(T_1 \cap T_2) = \frac{9801 + 3996}{10^7} = 0.0013797.$$

La probabilité qu'un seul test soit positif est

$$\Pr(T_1) = \frac{99 + 1998}{10^5} = 0.02097,$$

et il en est de même pour  $\Pr(T_2)$ .

Si les tests étaient indépendants, on aurait

$$\Pr(T_1 \cap T_2) = \Pr(T_1) \Pr(T_2).$$

Or, ici

$$\Pr(T_1 \cap T_2) > \Pr(T_1) \Pr(T_2),$$

ce qui montre que les tests ne sont pas (inconditionnellement) indépendants.

L'intuition est la suivante : lorsqu'un patient est positif au premier test, la probabilité qu'il soit infecté augmente fortement par rapport à la prévalence a priori ( $\Pr(M) = 0.001$ ). Par conséquent, la probabilité que le deuxième test soit également positif est plus élevée que  $\Pr(T_2)$ . Autrement dit,

$$\Pr(T_2 \mid T_1) > \Pr(T_2).$$

**Exercice 2.** (a) On a

$$\begin{aligned} X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \quad X(i) &= i, \quad i = 1, \dots, 6. \\ Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \quad Y(i) &= \begin{cases} 0, & i = 1, \dots, 5, \\ 1 & i = 6. \end{cases} \end{aligned}$$

(b) Pour  $X$  on a  $H = \{1, \dots, 6\}$ , pour  $Y$  on a  $H = \{0, 1\}$ .

(c) Pour  $X$  on a

$x_i$	1	2	3	4	5	6
$f(x_i) = \Pr(X = x_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Pour  $Y$  on a

$x_i$	0	1
$f(x_i) = \Pr(Y = x_i)$	5/6	1/6

(d) Pour  $X$  on a

$x_i$	1	2	3	4	5	6
$F(x_i) = \Pr(X \leq x_i)$	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	1

Pour  $Y$  on a

$x_i$	0	1
$F(x_i) = \Pr(Y \leq x_i)$	5/6	1

Dans les deux cas, on a, pour  $x \in [x_i, x_i + 1)$ ,  $i = 1, \dots, 6$ ,  $F(x) = F(x_i)$ .

(e) La loi de Bernoulli,  $Y \sim \mathcal{B}(1/6)$ .

### Exercice 3.

(a) Fonctions de fréquences ?

(i) Oui.

(ii) Non, car la condition  $\sum_i f(x_i) = 1$  n'est pas satisfaite.

(iii) Oui.

(iv) Non, car  $f(x_i) = \Pr(X = x_i)$  implique que  $0 \leq f(x_i) \leq 1$ ,  $i = 1, \dots, 11$ , ce qui n'est pas le cas ici. Par ailleurs, la condition  $\sum_i f(x_i) = 1$  n'est pas satisfaite.

(b) Fonctions de répartition ?

(i) Non, car  $F(x) = \Pr(X \leq x)$  implique que  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ .

(ii) Oui.

(iii) Non, car la fonction doit être non décroissante.

(c) On sait que  $\sum_{x_i} f(x_i) = \sum_{i=0}^{\infty} P(X = i) = 1$  et on a

$$\sum_{i=0}^{\infty} P(X = i) = c \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i = \frac{c}{1-(1-p)} = \frac{c}{p}.$$

Il faut donc que  $c = p$ .

### Exercice 4. Considérons les événements

$C$  = la clé est dans le manteau court,

$L$  = la clé est dans le manteau long,

$V$  = la clé est dans la veste trench,

$T_C$  = la clé est trouvée dans le manteau court,

$T_L$  = la clé est trouvée dans le manteau long,

$T_V$  = la clé est trouvée dans la veste trench.

On sait que

$$\begin{aligned}\Pr(C) &= p_c, & \Pr(L) &= p_l, & \Pr(V) &= p_v, \\ \Pr(T_C | C) &= \alpha_c & \Pr(T_L | L) &= \alpha_l, & \Pr(T_V | V) &= \alpha_v.\end{aligned}$$

La probabilité recherchée est donc

$$\begin{aligned}\Pr(C | T_C^c) &= \frac{\Pr(C \cap T_C^c)}{\Pr(T_C^c)} = \frac{\Pr(T_C^c | C)\Pr(C)}{1 - \Pr(T_C)} \\ &\stackrel{*}{=} \frac{(1 - \Pr(T_C | C))\Pr(C)}{1 - \Pr(T_C \cap C)} = \frac{(1 - \Pr(T_C | C))\Pr(C)}{1 - \Pr(T_C | C)\Pr(C)} \\ &= \frac{p_c - \alpha_c p_c}{1 - \alpha_c p_c}.\end{aligned}$$

\* Ici, comme  $\{C, C^c\}$  forme une partition de l'ensemble fondamental, on a utilisé la formule des probabilités totales pour écrire

$$\Pr(T_C) = \Pr(T_C \cap C) + \Pr(T_C \cap C^c),$$

mais  $\Pr(T_C \cap C^c) = 0$ , parce que Julie ne peut trouver la clé que dans la poche où cette dernière se trouve, donc  $\Pr(T_C) = \Pr(T_C \cap C)$ . Vous remarquerez aussi que nous n'avons pas eu besoin d'utiliser explicitement les événements  $L, V, T_L$  et  $T_V$  dans le calcul final, mais leur définition aide à formaliser le cadre et l'espace des possibles.